1 Princìpi numerici ed insiemistica

Minimo

Def: Sia $E \subset N$ non vuoto. E ammette minimo se $\exists m \in E : n \geq m \ \forall n \in E$. Il minimo è unico dato che altrimenti si avrebbe $m_1 \geq m_2$ ed $m_2 \geq m_1$ ossia, per antisimmetria, $m_1 = m_2$.

Principio del buon ordinamento

Qualunque sottoinsieme non vuoto di N ammette minimo. Non è possibile dimostrarlo in maniera rigorosa per un "matematico contemporaneo", la dimostrazione intuitiva è che prima o poi si troverebbe un minimo per definizione di sottoinsieme non vuoto di N. Si accetta come principio a priori, come assioma.

Combinatoria

·Permutazioni di n elementi $n! = n(n-1)...1$
· Disposizioni di n elementi in m gruppi $D_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$
· Combinazione di n el. in m gruppi, i gruppi con gli stessi el. in ordine diverso sono equivalenti $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
· Disposizione con ripetizione $D'_{n,m} = n^m$
· Combinazione con ripetizione $C'_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}$
· $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$

Formula di Newton

$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^m$
La formula si dimostra per induzione.

Dimostrazione: $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m+1} b^m + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^{m+1} =$
$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m+1} b^m + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} a^{n-m} b^{m+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} = a^{n+1} + bn + 1 + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m+1} b^m + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} a^{n-m} b^{m+1}$
sostituendo alla seconda parte $p = m+1$ si ottiene: $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^{m+1} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p+1} b^p + b^{n+1}$ e dunque si può affermare che $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^{m+1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} a^{n-m+1} b^m + b^{n+1}$ Dunque segue:
$a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m+1} b^m + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} a^{n-m+1} b^m + b^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \left[\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \right] a^{n-m+1} b^m =$
$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} a^{n-m+1} b^m = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} a^{n-m+1} b^m$

Principio di induzione

Il principio di induzione è equivalente al principio di buon ordinamento, è necessario prendere uno dei due come assioma. Sia $P(n)$ una proprietà, dipendente da un indice naturale n, tale che:
(i) $P(0)$ è vera
(ii) $P(n)$ è vera, allora $P(n+1)$ per ogni n.
Allora $P(n)$ è vera per ogni n.

Dimostrazione: Sia $F = \{n \in N : P(n)$ è falsa$\}$, e dimostriamo che F è vuoto. Si suppone per assurdo che F non sia vuoto, ciò porta a una contraddizione. Poiché F è un sottoinsieme non vuoto di N, per il principio del buon ordinamento, esiste un minimo $m \in F$. Poiché $m \in F$, $P(m)$ è falsa. Inoltre, $m \neq 0$ (i), $0 \notin F$). Quindi, $m-1$ è un numero naturale (poiché $m \geq 1$), e $P(m-1)$ è vera (poiché $m-1 \notin F$. Ma allora, per la (ii), $P(m)$ deve essere vera visto che si ha P(m-1+1), contraddicendo il fatto che $P(m)$ è falsa. F è vuoto.

Disuguaglianza di Bernoulli

Si dimostra per induzione. $(1+h)^n \geq 1 + nh \ \forall n \in N, h \geq -1$

Razionali

$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \setminus \{0\} \right\}$ Sono ordinati. È possibile rappresentarli graficamente tramite la nozione del teorema di Talete: Un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali stacca su di esse segmenti a due a due proporzionali.
La rappresentazione decimale è la seguente dove m è intero: $p = mq + r_1$, ad una certa le cifre decimali inizieranno SEMPRE a ripetere un periodo. Ad un qualsiasi sviluppo decimale periodico può esser associato un numero razionale, che però non è unico: $1 = 1,\overline{0} = 0,\overline{9}$. Ad ogni numero razionale della forma p/q può essere associato uno sviluppo decimale periodico "ben formato", ovvero, con un periodo diverso da 9. Non esiste il primo num. raz. maggiore di zero.

Reali

Si definisce un'addizione $+$ che ad ogni coppia di elementi $a, b \in R$ fa corrispondere un elemento $a + b \in R$ tale che:
- (a) $a + b = b + a \ \forall a, b \in R$ (commutativa);
- (b) $a + (b + c) = (a + b) + c \ \forall a, b, c \in R$ (associativa);
- (c) $\exists! 0 \in R : \ a + 0 = a \ \forall a \in R$ (zero, l'elemento neutro per $+$);
- (d) $\forall a \in R \ \exists! - a \in R$: $a + (-a) = 0$. Si scrive anche $a + (-b) = a - b$.

Si definisce una moltiplicazione $\cdot$ che ad ogni coppia di elementi $a, b \in R$ fa corrispondere un elemento $a \cdot b \in R$ tale che:
- (a) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R$ (commutativa);
- (b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$ (associativa);
- (c) $\exists! 1 \in R : \ a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R$ (uno, l'elemento neutro per $\cdot$);
- (d) $\forall a \in R$ diverso da zero, $\exists! a^{-1} \in R : \ a \cdot a^{-1} = 1$. Si scrive anche $a^{-1} = \frac{1}{a}$ e $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$;
- (e) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$ (distributiva).

Si definisce un ordinamento totale, ossia una relazione $\leq$ tra coppie di elementi di R tale che per ogni $a, b, c \in R$ si ha:
- (a) Se $a \leq b$ e $a \leq c$, allora $a \leq c$ (transitiva);
- (b) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$ (antisimmetrica);
- (c) Si ha sempre $a \leq a$ (riflessiva);
- (d) Per ogni coppia a e $b \in R$, si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$ (totale);
- (e) Se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$ (cancellazione);
- (f) Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$, allora $0 \leq a \cdot b$ (positività).

· Assioma di Completezza, senza di esso si dice CORPO ORDINATO. R è un corpo ordinato completo.

MaxMinSupInfMaggMin

Sia $E \subset E$. E ha massimo se $\exists x \in R$: $\forall y \in E$, $y \leq x$, $x \in E$. Il numero reale x si indica anche con $\max E$.
E ha minimo se $\exists x \in R$: $\forall y \in E$, $x \leq y$, $x \in E$ Il numero reale x si indica anche con $\min E$.
Si definisce $M(E)$, l'insieme dei maggioranti di E, come $M(E) = \{x \in R : x \geq y \ \ \forall y \in E\}$
Si definisce $m(E)$, l'insieme dei minoranti di E, come $m(E) = \{x \in R : x \leq y \ \ \forall y \in E\}$
E è limitato superiormente se $\exists M \in R$: $x \leq M \quad \forall x \in E$; equivalentemente, se $M(E) \neq \emptyset$.
E è limitato inferiormente se $\exists m \in R$: $m \leq x \quad \forall x \in E$; equivalentemente, se $m(E) \neq \emptyset$.
E è limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.
Se E è limitato superiormente, definiamo estremo superiore di E come il minimo dei maggioranti: $\sup E = \min M(E)$
Se E è limitato inferiormente, definiamo estremo inferiore di E come il massimo dei minoranti: $\inf E = \max m(E)$

Assioma di Completezza

Se $E \subseteq R$ è limitato superiormente, allora esiste il minimo dei maggioranti di E.
Se $E \subseteq R$ è limitato inferiormente, allora esiste il massimo dei minoranti di E.

Insieme induttivo

$E \subseteq R$ si dice *insieme induttivo* se soddisfa le seguenti condizioni:
- $0 \in E$,
- se $x \in E$, allora $x + 1 \in E$.

N si definisce come l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi.

Proprietà archimedea

Sia $x > 0$ un numero reale e sia E l'insieme di tutti i suoi multipli nx, con $n \in N$. Allora, E non è limitato superiormente.

Dimostrazione: Si suppone per assurdo che E sia limitato superiormente, e sia $S = \sup E$. Allora, $S - \frac{x}{2}$ non è un maggiorante di E, e deve esistere un elemento $nx \in E$ tale che $nx > S - \frac{x}{2}$. Ma allora, $(n+1)x > S + \frac{x}{2} > S$, il che è impossibile.

Densità di Q in R

Siano x e y numeri reali, con $y < x$. Allora esiste un numero razionale $\frac{p}{q}$ tale che $y < \frac{p}{q} < x$

Dimostrazione: Per la proprietà archimedea, esistono numeri naturali q tali che $q > \frac{1}{x-y}$, ossia tali che $qx > qy + 1$; se ne sceglie uno qualsiasi. Per la proprietà archimedea, esistono numeri naturali p tali che $p > qy$; per il principio del buon ordinamento, si può prendere il minimo di tali p, quindi si ha $p > qy \geq p - 1$ ossia $qy + 1 \geq p > qy$ che diventa per ciò detto prima $qx > p > qy$. Si divide per q.