Successioni, Serie e Limiti

Serie notevoli

Serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} < +\infty, \; S = \frac{1}{1-q}, & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty, & \text{se } q \geq 1 \\ \text{irregolare}, & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Somma parziale della serie:

$$\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

Serie armonica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} < +\infty, & \alpha > 1 \\ +\infty, & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Serie telescopica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim_{n\to+\infty} (b_{n+1})$$

Altro:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A \qquad \sum_{n=0}^{k} n = \frac{(k+1)k}{2}$$

Criterio del rapporto

$\{a_k\}$ succ. numeri positivi

$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

$\cdot\, L < 1 \Rightarrow \sum a_k < +\infty$

$\cdot\, L > 1 \Rightarrow \sum a_k = +\infty$

$\cdot\, L = 1 \Rightarrow$ boh

Criterio della radice

$\{a_k\}$ succ. numeri positivi

$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$

$\cdot\, L < 1 \Rightarrow \sum a_k < +\infty$

$\cdot\, L > 1 \Rightarrow \sum a_k = +\infty$

$\cdot\, L = 1 \Rightarrow$ boh

Criterio di Leibniz

$\{b_k\}$ succ. numeri reali

$\{a_k\} = (-1)^k b_k$

$$\begin{cases} b_k \geq 0 \\ b_k \geq b_{k+1} \\ b_k \to 0 \end{cases} \Rightarrow \sum a_k < +\infty$$

Criterio del confronto asintotico

$\{a_k\}, \{b_k\}$ succ. num. reali ≥ 0

$b_k \neq 0$ per $k \geq n_k$

$C1)\ \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0 \Rightarrow$ convergenza o divergenza per entrambe

$$C2)\ \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_k = +\infty \Rightarrow b_k = +\infty \\ b_k < +\infty \Rightarrow a_k < +\infty \end{cases}$$

$$C3)\ \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = +\infty \Rightarrow \begin{cases} b_k = +\infty \Rightarrow a_k = +\infty \\ a_k < +\infty \Rightarrow b_k < +\infty \end{cases}$$

Limiti e successioni

Formula di Stirling

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

Tendenze asintotiche, $\epsilon(x) \to 0$

$1 - \cos(\epsilon(x)) \sim \frac{\epsilon^2(x)}{2}$

$e^{\epsilon(x)} - 1 \sim \epsilon(x) \to \frac{e^{\epsilon(x)}-1}{\epsilon(x)} \sim 1$

$\ln(1-\epsilon(x)) \sim \epsilon(x)$

$(1+\epsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha\epsilon(x)$

$\sin(\epsilon(x)) \sim \epsilon(x)$

$\tan(\epsilon(x)) \sim \epsilon(x)$

Gerarchia

$n^n \succ n! \succ A^n \succ n^a \succ (\ln(n))^b$

Limiti notevoli

$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

$\lim_{x\to0} x^x = 1$

$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

$\lim_{x\to0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{k}{x})^x = e^k$

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Se $\{a_n\}$ è limitata, allora esiste una sottosuccessione estratta $\{a_{k_n}\}$ che converge a un numero reale L

esempio : $(-1)^k$ con k pari tende ad 1

Teorema delle sottosuccessioni/successioni estratte

Se da $\{a_n\}$ si possono estrarre due sottosuccessioni che convergono a $L_1 \neq L_2$, allora $\{a_n\}$ non ha limite.

Condizione necessaria di convergenza

$a_k \subseteq R, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = L \in R \Rightarrow a_k \to 0, k \to +\infty$

Teorema dei carabinieri

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = L$.

Extra

·Se una successione converge assolutamente, allora converge semplicemente

$|a_k| < +\infty \Rightarrow a_k < +\infty$

· Tutte le successioni convergenti sono limitate

$\cdot\, \lim_{n\to+\infty} \frac{succ.\ limitata}{n} = 0,\ esempi:\ (-1)^n, \sin(n), ecc.$

$\cdot\, a^3 \pm b^3 = (a-b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Criterio del confronto: serie associate alle successioni

$\forall k \in N \quad 0 \leq a_k \leq b_k$

$\cdot\, S_{a_k} \to \pm\infty \Rightarrow S_{b_k} \to \pm\infty$

$\cdot\, S_{b_k} < +\infty \Rightarrow S_{a_k} < +\infty$