NOTA: La seguente soluzione potrebbe essere imprecisa, è dunque opportuno ricontrollare le proposizioni ed i conti. SOS - MATEMATICA @RebC

Problema:

Di ognuna delle seguenti matrici quadrate reali dire se è invertibile ed eventualmente calcolarne l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

Una matrice è invertibile se e solo se ha *rango* massimo, in questo caso il rango massimo per tutte e tre le matrici è 3.

Poiché il rango di una matrice è la dimensione della *base del sottospazio vettoriale delle colonne* di essa, è possibile utilizzare l'algoritmo di *eliminazione di Gauss* per verificare che le colonne siano tutte linearmente indipendenti tra loro, ossia è necessario verificare la presenza, in questo caso, di tre *pivot*.

Per evitare calcoli inutili è opportuno applicare direttamente l'*algoritmo di calcolo della matrice inversa*, ossia è necessario aggiungere la *matrice identità* alla matrice iniziale e proseguire tramite l'*eliminazione di Gauss* fin quando risulta rimanere, al posto della matrice iniziale, solamente la diagonale dei *pivot* con valore unitario, ossia una identità.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Applicando l'*eliminazione:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

Poiché nella prima e nella terza matrice è apparsa l'identità nelle posizioni occupate dai valori della matrice iniziale, esse sono invertibili. La seconda matrice non risulta esser invertibile.

Le matrici inverse della prima e della terza si trovano al lato destro e sono le seguenti:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Nota: I conti sono stati svolti tramite il seguente sito web, essi non sono stati verificati.