1) Si dice che la funzione f(x) ha limite finito l, per x tendente a c e si scrive:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

quando in corrispondenza un numero piccolo fissato a piacere $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un intorno I del punto c, tale che per ogni x$\in I$ e diverso da c, i valori corrispondenti della f(x) differiscono da l, in valore assoluto meno di ε, cioè soddisfano tutti la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

la quale corrisponde a:

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

OSS.

a) L'esistenza del limite della funzione, in un dato punto c, ècompletamente indipendente dal comportamento della funzione nel punto stesso.
b) Nel punto c può esistere il limite della funzione, senza che in questo punto esista il valore della funzione.
c) Nel punto c può esistere sia il limite della funzione che il valore della funzione stessa ed essere l$\neq f(c)$

1a) Si dice che il numero l è il limite sinistro della funzione f(x) per x tendente a c^- (c meno), e si scrive:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l$$

quando in corrispondenza un numero piccolo fissato a piacere $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un intorno I sinistro del punto c, tale che per ogni x$\in I$ e diverso da c, i valori corrispondenti della f(x) differiscono da l, in valore assoluto meno di ε, cioè soddisfano tutti la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

1b) Si dice che il numero l è il limite sinistro della funzione f(x) per x tendente a c^- (c meno), e si scrive:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

quando in corrispondenza un numero piccolo fissato a piacere $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un intorno I destro del punto c, tale che per ogni x$\in I$ e diverso da c, i valori corrispondenti della f(x) differiscono da l, in valore assoluto meno di ε, cioè soddisfano tutti la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

DEFINIZIONE: Un a funzione amette limite in un punto soltanto quando in quel punto esiste il limite destro e sinistro della funzione e questi due limiti sono uguali; il valore comune dei due limiti ci darà poi il valore del limite della funzione in quel punto.

2) Si dice che la funzione f(x) ha per limite l'infinito, per x tendente a c e si scrive:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

quando in corrispondenza un numero positivo fissato a piacere $M > 0$, è possibile determinare un intorno completo I del punto c, tale che per ogni x∈ I e diverso da c, è soddisfatta la disequazione:

$$|f(x)| < M$$

cioè la f(x) assume valori, in valore assoluto, più grandi di M.

2a) Si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

se nell'intorno I di c, vale sempre la seguente relazione: f(x)>M;

2b) Si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

se nell'intorno I di c, vale sempre la seguente relazione: f(x)<-M.

3) Si dice che la funzione f(x) ha limite finito l, per x tendente all'infinito e si scrive:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

quando in corrispondenza un numero piccolo fissato a piacere $\varepsilon > 0$, esiste un numero positivo N tale che per ogni valore della x soddisfacente la condizione:

$$|x| > N$$

i corrispondenti valori della f(x) differiscono tutti dal numero l, in valore assoluto, meno di ε, ossia soddisfano la disequazione:

è possibile determinare un intorno I del punto c, tale che per ogni x∈ I e diverso da c, i valori corrispondenti della f(x) differiscono da l, in valore assoluto meno di ε, cioè soddisfano tutti la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

3a) Se la precedente disequazione è soddisfatta soltanto per x>N si ha il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

3b) Se la precedente disequazione è soddisfatta soltanto per x<-N si ha il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

4) Si dice che la funzione f(x) ha per limite l'infinito, per x tendente all'infinito e si scrive:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

quando in corrispondenza un numero fissato a piacere $M > 0$, esiste un numero positivo N tale che per ogni valore della x soddisfacente la condizione:

$$|x| > N$$

i corrispondenti valori della f(x) soddisfano tutti la disequazione:

$$|f(x)| > M.$$

4a) Diremo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

fissato x>N, risulta soddisfatta la seguente disequazione: f(x)>M.

4b) Diremo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

fissato x>N, risulta soddisfatta la seguente disequazione: f(x)<-M.

4c) Diremo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

fissato x<-N, risulta soddisfatta la seguente disequazione: f(x)>M.

4c) Diremo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

fissato x<-N, risulta soddisfatta la seguente disequazione: f(x)<-M