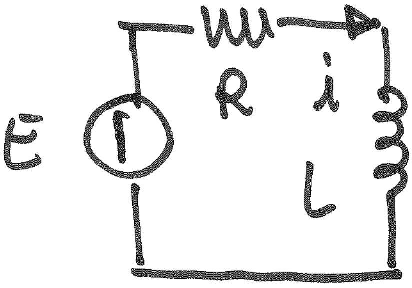
Una trattazione "elementare" dell'analisi dinamica di un circuito R-L

1



$$\begin{cases} E = Ri + L\dfrac{di}{dt} \\ i(0) = I_0 \end{cases}$$

Riscriviamo l'equazione come

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

moltiplichiamo a sinistra e a destra per $e^{\frac{R}{L}t}$

$$e^{\frac{R}{L}t}\frac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t}\frac{R}{L} i = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

e la riorganizziamo come

$$\frac{di}{dt}e^{\frac{R}{L}t} + i\frac{d}{dt}e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{R}\frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

riconoscendo la derivata di un prodotto

$$\frac{d}{dt}\left(ie^{\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}\frac{d}{dt}e^{\frac{R}{L}t}$$

ovvero anche $$\frac{d}{dt}\left[i(t)e^{\frac{R}{L}t}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right)$$

2

Ora, se due funzioni hanno le stesse derivate, le loro differenza è costante

$$i(t)\,e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + K$$

e dividendo per $e^{\frac{R}{L}t}$

$$i(t) = \frac{E}{R} + k e^{-\frac{R}{L}t}$$

Imponendo la condizione iniziale

$$i(0) = I_0$$

$$I_0 = \frac{E}{R} + k e^{0} \Rightarrow k = I_0 - \frac{E}{R}$$

e infine il profilo temporale della corrente

è espresso da

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}}$$

se l'induttore parte scarico, $I_0 = 0$ e

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \text{ per } t \geq 0 .$$