La formula di Binet per i numeri di Fibonacci: una dimostrazione con l'algebra lineare

Francesco Daddi

Agosto 2009

Lo scopo di queste pagine è quello di dimostrare la formula di Binet per i numeri di Fibonacci facendo uso dell'algebra lineare.

La successione di Fibonacci è definita nel seguente modo:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \forall\, n > 1 \end{cases}$$

osserviamo che, per ogni $k \geq 1$, risulta:

$$\begin{cases} F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \\ F_k = F_k \end{cases}$$

che possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix} ;$$

se poniamo

$$u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

si ha:

$$u_k = A u_{k-1} \quad \Rightarrow \quad u_k = A^2 u_{k-2} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad u_k = A^k u_0 \quad \text{dove} \quad u_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

dobbiamo cercare di scrivere con una formula chiusa le potenze di A; per risolvere questo problema possiamo diagonalizzare A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} .$$

Ponendo, per semplicità,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \, , \; D = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

abbiamo

$$A = PDP^{-1} \quad \text{da cui} \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

e quindi

$$u_k = PD^kP^{-1}u_0 \quad \forall k \geq 1 \; .$$

Dal momento che

$$D^k = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \end{bmatrix} \, ,$$

possiamo ottenere l'espressione generale per i numeri F_{k+1} e F_k :

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ;$$

svolgiamo i calcoli:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \end{bmatrix} \; ;$$

dal momento che $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pm 1 \mp \sqrt{5}}{2}\right) = \mp 1$, abbiamo:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \end{bmatrix} ;$$

se consideriamo solo la seconda coordinata, troviamo la formula di Binet:

$$F_k = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \right] . \quad \square$$

Riferimenti bibliografici

[1] M.W. Baldoni, C. Ciliberto, G.M. Piacentini Cattaneo: capitolo 1 del materiale didattico per il master universitario di II livello in *"Numeri e Codici. Lezioni di matematica"* presso la Scuola Iad - Università Tor Vergata Roma (A.A. 2008/2009).