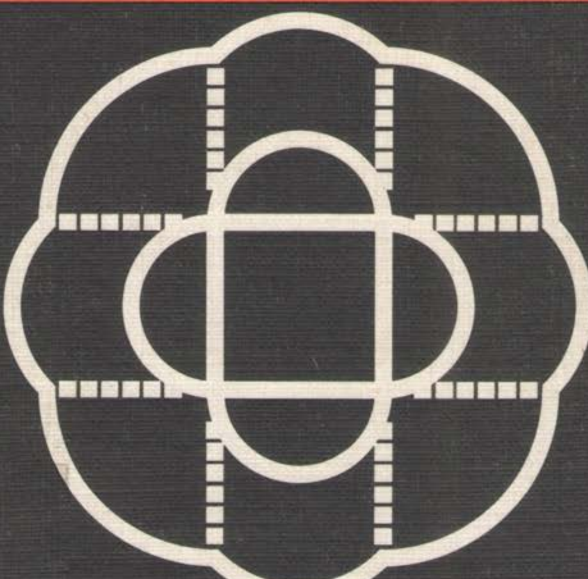
George Polya

Come risolvere i problemi di matematica

Logica ed euristica nel metodo matematico



Feltrinelli

Collana di aggiornamento
e didassi

11

Titolo dell'opera originale
How to solve it

Traduzione dall'inglese di
Maria Spoglianti

Prima edizione italiana: aprile 1967
Seconda edizione: giugno 1976

George Polya

Come risolvere i problemi di matematica

Logica ed euristica nel metodo matematico

Feltrinelli Editore Milano

Dalla prefazione alla prima edizione

Un'idea geniale risolve spesso un grande problema, ma nella risoluzione di tutti i problemi interviene un pizzico di genialità. Può trattarsi di un problema modesto; tuttavia, se esso stuzzica la nostra curiosità ed eccita le nostre facoltà mentali e, soprattutto, se si riesce a risolverlo da soli, si scoprirà l'ansia della ricerca e la gioia della scoperta. Simili esperienze, fatte a tempo opportuno, possono rappresentare un vero e proprio esercizio dello spirito e lasciare un'impronta nell'animo e nel carattere per tutta la vita.

Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale.

Anche a quello studente il cui piano di studi contempli soltanto qualche ora di matematica si offre una particolare occasione. Naturalmente egli può sciuparla, se si ostinerà a riguardare la matematica come una materia della quale deve raggiungere un certo livello di conoscenza e che potrà dimenticare al piú presto dopo aver sostenuto l'esame finale. Questa occasione può infine essere smarrita anche se l'alunno ha una naturale inclinazione per la matematica; infatti egli, come ogni altro ragazzo, deve ancora scoprire le sue possibilità ed i suoi gusti: come non può sapere se gli piacciono i lamponi finché non ne avrà assaggiato. Tuttavia gli sarà facile comprendere che un problema di matematica può assumere un aspetto piú piacevole se presentato come un gioco enigmistico, oppure che un conciso ragionamento mentale può divenire un esercizio altrettanto eccitante di una veloce partita di tennis. Avendo gustato il piacere di fare della matematica, egli non dimenticherà molto rapidamente questa materia e c'è una buona probabilità che essa divenga qualcosa per lui: un *hobby*, oppure uno strumento nella sua professione, oppure la sua professione stessa, oppure una grande ambizione.

L'autore ricorda l'epoca in cui egli era studente, uno studente un po' presuntuoso, animato da un grande desiderio di comprendere la matematica e la fisica. Si recò ad ascoltare conferenze, lesse libri, tentò di capire le risoluzioni ed i fatti esposti; eppure una domanda lo tormentava sempre piú: "Sí, la risoluzione è soddisfacente e sembra esatta; ma come è possibile inventare una risoluzione siffatta? Sí, questo esperimento affascina ed appare conforme alla realtà; ma come si possono scoprire tali cose? E come potrei, io da solo, inventare oppure scoprire tutto ciò?". Oggi l'autore insegna matematica all'università; egli pensa, o almeno spera, che qualcuno dei suoi studenti piú perspicaci si ponga le stesse domande e tenti di appagare la propria curiosità. Proprio sforzandosi non soltanto di comprendere la risoluzione di questo o quel problema, ma anche i motivi che hanno condotto alla scelta di determinati metodi di risoluzione e spiegando ad altri questi motivi e questi metodi, l'autore giunse a scrivere questo libro. Egli spera che esso sarà utile sia agli insegnanti che desiderino sviluppare nei propri studenti l'abilità nel risolvere problemi sia agli studenti migliori ed a tutti coloro che intendano secondare le proprie inclinazioni.

Questo libro, che si propone di prestare particolare attenzione alle esigenze degli studenti e degli insegnanti di matematica, dovrebbe anche interessare coloro che si occupano delle vie e dei mezzi di ricerca e di scoperta. Siffatto interesse è piú esteso di quanto si possa immaginare. Lo stesso spazio riservato sui giornali e sulle riviste ai giochi di enigmistica è indizio della circostanza che, in realtà, si dedica molto tempo alla risoluzione di problemi che nulla hanno a che vedere con la vita pratica. Oltre al desiderio di risolvere questo o quel quesito indipendentemente da ogni vantaggio materiale, ciò riflette una curiosità piú profonda, un anelito a comprendere le vie ed i mezzi, le cause ed i procedimenti delle risoluzioni stesse.

Queste pagine, scritte in uno stile piuttosto conciso, ma semplice il piú possibile, sono il frutto di un lungo e profondo studio dei metodi di risoluzione. Tale studio, che alcuni autori designano con il nome di *euristica,* oggi non è di moda; tuttavia esso ha un glorioso passato e, forse, un futuro.

Studiando i metodi per la risoluzione dei problemi, si scopre un altro aspetto della matematica. Sí, la matematica ha due volti: è la scienza severa di Euclide e qualcosa d'altro. Nell'assetto euclideo essa ci appare una scienza sistematica, deduttiva; ma nella pratica si rivela una scienza sperimentale, induttiva. Questi due aspetti sono nati insieme alla stessa matematica; ma, in un certo senso, si può dire che il secondo di essi è piú recente: la matematica *in statu nascendi*, nel processo della sua formazione, non è mai stata presentata esaurientemente in questo modo né agli studenti, né agli insegnanti, né al pubblico non specializzato.

Il campo dell'euristica presenta molteplici connessioni: matematici, logici, psicologi, educatori e persino i filosofi possono riguardarne vari rami come specifici dei domini delle scienze che essi rispettivamente coltivano. L'autore, perfettamente conscio della possibilità di una critica da parte di coloro che non condividono le sue opinioni, e profondamente consapevole dei propri limiti, tiene ad avanzare questa sola precisazione: egli ha una grande esperienza di risoluzioni di problemi e di insegnamento della matematica a vari livelli.

Gli stessi argomenti trattati qui saranno ripresi in un volume piú ampio e particolareggiato che l'autore ha in animo di scrivere e pubblicare quanto prima.

Università di Stanford, 1 agosto 1944.

Dalla prefazione alla settima ristampa

Sono felice di poter riconoscere di essere riuscito a mantenere, sia pure in parte, una promessa formulata nella prefazione alla prima edizione: i due volumi *Induction and Analogy in Mathematics* e *Patterns of Plausible Inference*, che costituiscono il mio recente lavoro *Mathematics and Plausible Reasoning*, sono il seguito delle premesse poste in *How to Solve It.*

Zurigo, 30 agosto 1954.

Prefazione alla seconda edizione

Questa seconda edizione presenta, oltre a qualche miglioramento, una nuova quarta parte "Problemi, suggerimenti, risoluzioni".

Mentre era in corso la stampa di questa edizione, uscí uno studio (*Educational Testing Service*, Princeton, N. J.; v. "Time", 18 giugno 1956) che sembra avere avanzato alcune osservazioni in proposito — esse non costituiscono una novità per il pubblico specializzato, ma era tempo che fossero espresse in termini comprensibili a tutti: "... la matematica gode dell'incerto onore di essere la materia meno popolare della carriera scolastica... I futuri insegnanti imparano a detestarla fin dalle prime classi elementari... E cosí essi ritornano alle scuole per insegnare ad una nuova generazione ad odiare la stessa materia".

Spero che la presente edizione, destinata ad una piú ampia diffusione, possa convincere qualcuno dei lettori che la matematica, oltre ad essere uno strumento indispensabile per l'ingegneria ed ogni conoscenza scientifica, può essere stimolante ed inoltre rivelare un'attività dello spirito di profondo valore.

Zurigo, 30 giugno 1956.

Schema di risoluzione

Comprensione del problema

Prima fase

Qual è l'incognita? Quali sono i dati? Qual è la condizione?

Si deve *comprendere* il problema.

È possibile soddisfare alla condizione? La condizione è sufficiente a determinare l'incognita? Oppure essa non è sufficiente? Oppure è sovrabbondante? Oppure è contraddittoria in termini?

Si disegni una figura. Si introduca un conveniente sistema di notazioni.

Si separino le varie parti della condizione. Si possono scrivere queste separatamente?

Compilazione di un piano

Seconda fase

Questo problema è già noto? Oppure lo stesso problema si è già presentato sotto un aspetto leggermente diverso?

Si determinino i legami che intercorrono fra i dati e l'incognita. Può essere necessario ricorrere a problemi ausiliari, quando non si trovi una connessione evidente.

È noto un problema connesso con questo? Si conosce un teorema che potrebbe essere utile?

Si rifletta sull'incognita! E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure una incognita analoga.

Ecco un problema connesso con quello pro-

Infine si compili un *piano* di risoluzione.

posto e risolto precedentemente. È possibile sfruttarlo? Si può far uso del suo risultato? Si può far uso del suo metodo? Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso? Si può enunciare il problema in altra forma?

Lo si può enunciare in forma ancora diversa? Si ricorra alle definizioni.

Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo. Si sa inventare un problema connesso piú accessibile? Ed uno piú generale? Ed uno analogo? Ed uno piú particolare? Si riesce a risolvere almeno una parte del problema? Si tenga conto soltanto di una parte della condizione, trascurando l'altra; fino a che punto allora risulta determinata l'incognita e come può essa variare? Si può ricavare qualche informazione utile dai dati? Si possono trovare altri dati atti a determinare l'incognita? Si possono cambiare i dati, oppure l'incognita, oppure se necessario tutte queste quantità, in modo che la nuova incognita ed i nuovi dati siano quasi eguali ai precedenti?

Si è fatto uso di tutti i dati? È stata considerata l'intera condizione? Sono stati presi in esame tutti i concetti essenziali che intervengono nel problema?

Sviluppo del piano

Terza fase

Si proceda allo *sviluppo* del piano.

Sviluppando il piano, *si verifichi ogni passaggio.* Si può riconoscere manifestamente che ogni passaggio è esatto? Si può dimostrarne l'esattezza?

Alla fine

Quarta fase	Si può *verificare il risultato*? Si può verificare il procedimento?
Bisogna *esaminare* attentamente la soluzione ottenuta.	Si può ottenere il risultato in altro modo? Lo si può vedere a colpo d'occhio?
	Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema?

Introduzione

Le considerazioni che seguiranno sono raggruppate secondo il precedente schema di domande e di suggerimenti che abbiamo denominato *Schema di risoluzione*. Ciascuna domanda o suggerimento tratto da esso sarà stampato in carattere *corsivo*, mentre si indicherà l'intero elenco dicendo semplicemente "lo schema" oppure "il nostro schema".

Nelle pagine seguenti verrà spiegato lo scopo dello schema suddetto, se ne illustrerà l'impiego effettivo con esempi e saranno posti in evidenza le nozioni implicite ed i processi mentali in esso sottintesi. Come spiegazione iniziale, si può dire questo: Rivolgendo a se stessi quelle domande e quei suggerimenti opportunamente modificati a seconda dei vari casi, si ricaverà un aiuto per risolvere i problemi. Rivolgendo le stesse domande e gli stessi suggerimenti in modo conveniente ad uno studente, lo si aiuterà a risolvere il suo problema.

Il volume consta di quattro parti.

Il titolo della prima parte, che comprende venti paragrafi, è *In classe*. Ciascun paragrafo è contraddistinto da un numero in tondo; cosí, per esempio, il "paragrafo 7". Nei paragrafi 1-5 viene discusso lo "scopo dello schema" in termini generali. I paragrafi 6-17 chiariscono cosa si debba intendere per "suddivisioni principali" e "domande fondamentali" dello schema e contengono un primo esempio pratico. Nei paragrafi 18, 19 e 20 seguono altri esempi.

La seconda parte, intitolata *La risoluzione*, è molto breve; essa è redatta sotto forma di dialogo: un ipotetico insegnante pone semplici quesiti ad un ipotetico allievo.

La terza parte, la piú estesa, è in effetti un *Breve compendio di nozioni di euristica*, che indicheremo come il *Compendio*. Essa comprende sessantasette articoletti relativi ai vari argomenti. Per esempio, il significato del termine *Euristica* è spiegato nell'articolo avente questo titolo a pagina 119. Nel contesto ricorreremo al corsivo ogni qual volta dovremo riferirci ad uno di questi articoli. Alcuni paragrafi dei medesimi presentano un carattere essenzialmente tecnico e sono racchiusi fra parentesi quadrate. Certi articoli, poi, sono chiaramente e strettamente legati alla prima parte della quale risultano un'ulteriore chiarificazione ed uno specifico commento. Altri ancora si estendono al di là dei limiti segnalati nella prima parte e ne illustrano i concetti fondamentali. Importante quello dedicato all'*Euristica moderna*. Esso mette in luce i legami che intercedono fra i principali articoli e l'intento che ha condotto alla compilazione del *Compendio*; inoltre contiene alcuni suggerimenti che consentono di dedurre utili informazioni circa particolari termini dello schema. Vogliamo qui insistere sull'effettiva esistenza di una trama unitaria e di un preciso legame fra i vari articoli, che forse, a prima vista, possono sembrare del tutto slegati ed eterogenei. Fra essi ve ne sono alcuni piuttosto lunghi, ispirati ad una concisa, ma sistematica discussione di qualche argomento di carattere generale; altri risultano piuttosto commenti a casi particolari, oppure richiami ad altre opere, oppure cenni storici, oppure riferimenti, aforismi e persino giochetti.

Il *Compendio* non deve essere letto troppo rapidamente; il contesto, spesso stringato nella forma, talvolta richiede un profondo spirito di osservazione. Il lettore può ricorrere al *Compendio* per informazioni su particolari argomenti. Se questi gli sono suggeriti dalla sua stessa esperienza, da problemi originali o dei suoi alunni, la lettura del presente volume risulterà particolarmente efficace.

Il titolo della quarta parte è poi *Problemi, suggerimenti, risoluzioni*; vi si propongono alcuni problemi per i lettori piú perspicaci. Ciascun quesito è fatto seguire (ad opportuna distanza) da una traccia atta a mostrare una via per giungere al risultato, la cui spiegazione trovasi nella "risoluzione".

Abbiamo ripetutamente menzionato lo "studente" e l'"insegnante" e ciò accadrà piú volte anche nel seguito. Forse è opportuno specificare che lo "studente" può essere un universitario od anche un alunno delle scuole secondarie o, piú in generale, chiunque si interessi allo studio della matematica. Cosí pure l'"insegnante" può essere un docente universitario od anche un professore di scuole secondarie o, piú in generale, chiunque si interessi alla tecnica dell'insegnamento della matematica. L'autore esamina le varie questioni ora dal punto di vista di uno studente, ora da quello di un insegnante (quest'ultima circostanza si verifica piú frequentemente nella prima parte). Inoltre, il piú delle volte e specialmente nella terza parte, il punto di vista dell'autore è quello di un individuo che non è né un insegnante né uno studente, ma che desideri risolvere un problema che gli si è presentato.

Parte prima

In classe

Scopo dello schema

1. *Come aiutare gli studenti.* — Uno dei compiti piú importanti dell'insegnante è quello di aiutare i suoi allievi. Non si tratta di un compito semplice; esso richiede tempo, fatica, entusiasmo e una profonda preparazione.

Lo studente dovrebbe acquisire la massima esperienza lavorando da solo. Ma, se lasciato senza alcun aiuto o con un aiuto insufficiente dinanzi al suo problema, è probabile che egli non compia proprio alcun progresso. D'altra parte, se l'insegnante è troppo prodigo di aiuto, all'alunno non resta piú nulla da fare; quindi l'insegnante dovrebbe intervenire, ma non troppo né troppo poco, in modo che lo studente possa sostenere una *parte ragionevole di lavoro.*

Se l'allievo non è in grado di fare molto, l'insegnante dovrebbe lasciargli almeno l'illusione di sapere lavorare da solo; a tale fine egli dovrebbe aiutare il ragazzo con discrezione, *in maniera opportuna.*

Comunque la cosa migliore è porgere aiuto allo studente con naturalezza. L'insegnante dovrebbe perciò immedesimarsi nell'allievo, comprendere il suo livello di conoscenza, tentare di capire ciò che si agita nella sua mente e, di conseguenza, rivolgergli quella domanda od indicare proprio quel passaggio che *lo stesso studente avrebbe potuto formulare.*

2. *Domande, raccomandazioni, operazioni mentali.* — Per aiutare lo studente in maniera efficace, ma con discrezione e naturalezza, l'insegnante è obbligato a rivolgere ripetutamente le stesse domande e ad indicare piú volte gli stessi passaggi. Cosí, in innumerevoli problemi, bisogna formulare la domanda: *Qual è l'incognita?* Si possono usare altre locuzioni e chiedere la stessa cosa in molti modi diversi: Cosa si cerca? Cosa si vuole trovare? Cosa

si suppone di dover cercare? Tutte queste domande hanno lo scopo di concentrare l'attenzione dello studente su ciò che chiede il problema. Talvolta si può conseguire il medesimo fine piú spontaneamente, con il suggerimento: *Si rifletta sull'incognita!* Domande e suggerimenti tendono ad un medesimo effetto: provocano una stessa operazione mentale.

L'autore ha ritenuto opportuno raccogliere e suddividere in gruppi le domande ed i suggerimenti piú utili nelle discussioni con gli allievi intorno a determinati problemi. Lo schema dianzi presentato contiene appunto domande e suggerimenti siffatti, accuratamente scelti e formulati; essi sono di aiuto anche a chi si accinge a risolvere un problema da solo. Quando avrà acquistato un po' di familiarità con lo schema, il lettore scorgerà, oltre il suggerimento, l'indicazione di un ragionamento; allora egli comprenderà anche che il nostro schema elenca implicitamente *quelle operazioni mentali particolarmente utili per la risoluzione dei problemi.* Queste operazioni si succedono nello schema secondo l'ordine in cui si presentano con piú probabilità.

3. *La generalità.* — La generalità è un'importante caratteristica delle domande e dei suggerimenti contenuti nel nostro schema. Per esempio, si considerino le domande: *Qual è l'incognita? Quali sono i dati? Qual è la condizione?* Esse possono essere applicate in generale, sono suscettibili di poter essere rivolte con ottimo risultato qualunque sia il particolare problema che si sta trattando. Il loro impiego non è limitato a nessuna questione particolare. Si tratti di un problema algebrico, matematico o non matematico, teorico o pratico, profondo o tipo gioco d'enigmistica, non vi è differenza: quelle domande non perdono significato e sono di aiuto per risolvere proprio quel problema.

In realtà c'è una *limitazione*, che tuttavia non ha nulla a che fare con il campo di applicazione. Alcune domande ed alcuni suggerimenti dello schema sono applicabili ai "problemi di determinazione", ma non ai "problemi di dimostrazione" In un problema di questa seconda specie, intervengono altre domande (v. il paragrafo *Problemi di determinazione, problemi di dimostrazione*).

4. *Il senso comune.* — Le domande ed i suggerimenti del nostro schema hanno carattere generale, ma, a parte questa loro generalità, sono del tutto naturali, semplici, ovvi e procedono da un

chiaro senso comune. Si consideri il suggerimento: *Si rifletta sull'incognita! E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga.* Esso consiglia ciò che si farebbe comunque, senza alcun aiuto, quando si fosse veramente impegnati nella risoluzione del problema proposto. Abbiamo fame? Vogliamo del cibo e ricorriamo al mezzo piú semplice per ottenerlo. Dobbiamo eseguire una costruzione geometrica? Vogliamo costruire, per esempio, un triangolo e ricorriamo ai mezzi consueti per disegnarlo. Abbiamo un problema di altro genere? Dobbiamo determinare una certa incognita ed immediatamente pensiamo ai procedimenti già noti per trovare o proprio questa incognita oppure un'altra ad essa analoga. Cosí facendo si seguono alla lettera i consigli elencati nello schema. Ed è la via giusta; il suggerimento è buono, indica un procedimento che molto spesso conduce al successo.

Tutte le domande ed i suggerimenti del nostro schema sono immediati, semplici, ovvi, in pieno accordo con il senso comune; essi sono anzi l'espressione in termini generali dello stesso senso comune. Infatti indicano una certa linea di condotta che è proprio quella che viene spontanea a chiunque si interessi seriamente al problema che sta trattando e possieda un po' di buon senso. Tuttavia anche chi procede in modo corretto non si cura, in generale, di spiegare in termini precisi il suo procedimento e, forse, spesso non saprebbe neppure farlo; il nostro schema tenta di formulare una spiegazione siffatta.

5. Collaborazione fra insegnante e studenti. Imitazione ed esercizio. — Rivolgendo ai suoi alunni una domanda oppure porgendo loro un suggerimento secondo il nostro schema, l'insegnante deve tenere presenti due fini principali: 1) Aiutare lo studente a risolvere il problema proposto. 2) Sviluppare l'abilità dello studente di modo che questi sia in grado di risolvere da solo i problemi che dovrà affrontare in seguito.

L'esperienza prova che le domande ed i suggerimenti del nostro schema, applicati con discernimento, in effetti aiutano molto spesso l'allievo. L'una e gli altri presentano due caratteristiche in comune: immediatezza e generalità. Ispirati al piú semplice senso comune, essi sovente vengono spontaneamente alle labbra; si potrebbero affacciare anche alla mente di un alunno. Essendo di carattere generale, forniscono un aiuto discreto; indicano una direzione generica, lasciando lo studente libero nella scelta.

Si noti che i due intenti che abbiamo menzionato poco fa sono intimamente legati fra loro: se l'allievo riesce a risolvere un problema, di colpo si accresce la sua destrezza a risolvere anche altri problemi. Occorre poi ricordare che le nostre domande sono valide in generale, applicabili in molti casi; se una stessa domanda rivelerà ripetutamente la sua efficacia, è difficile che l'alunno non se ne accorga e tralasci di porsi il medesimo interrogativo in circostanze analoghe. Cosí facendo piú volte di seguito, egli riuscirà finalmente a scoprire l'intimo significato di essa: allora l'avrà veramente assimilata.

Può accadere anche che uno studente comprenda alcune domande del nostro elenco cosí bene da essere in grado, ad un certo momento, di porsi da solo la domanda opportuna al tempo opportuno e di condurre a termine spontaneamente e rigorosamente la corrispondente operazione mentale. Egli ha senza dubbio ricavato il massimo profitto possibile dallo schema. Come può l'insegnante operare per ottenere questo splendido risultato?

Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria come, permettetemi il paragone, il nuotare. Qualunque abilità pratica può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio. Sforzandosi di imparare a nuotare, si imitano i gesti e gli sgambettii di coloro che riescono a stare a galla nell'acqua e, a poco a poco, si impara a nuotare... nuotando. Per imparare a risolvere i problemi, è necessario osservare ed imitare come vi riescono altre persone ed infine si riesce a risolvere i problemi... risolvendoli.

L'insegnante che voglia rendere i suoi alunni piú abili a risolvere quesiti di matematica deve scegliere esercizi convenienti e saper risvegliare nei loro animi l'interesse per questo genere di problemi, procurando loro numerosissime occasioni di cimentarsi sia per imitazione sia in tentativi originali. Se vuole esercitare gli studenti a quelle operazioni mentali che corrispondono alle domande ed ai suggerimenti del nostro schema, l'insegnante non deve fare altro che proporre loro sia quelle che questi ogni qualvolta ciò si riveli utile e spontaneo. Inoltre, quando egli risolve un problema in classe, è opportuno che finga un poco, mostrandosi quasi incerto, e che si rivolga a voce alta le stesse domande a cui ricorre in altri momenti per aiutare i ragazzi. Grazie a questi accorgimenti, gli allievi comprenderanno l'uso corretto di tali domande e suggerimenti; cosí verranno a possedere qualcosa di ancora piú importante della stessa conoscenza di una qualunque particolare verità matematica.

Suddivisioni principali, domande fondamentali

6. *Le quattro fasi della risoluzione.* — Durante la risoluzione di un problema, bisogna mutare piú volte il punto di vista, ossia è necessario esaminare il problema sotto diversi aspetti, variare ripetutamente la propria posizione dinanzi ad esso. La visione del problema risulta all'inizio piuttosto incompleta; compiuti i primi passi, essa appare già diversa ed ancora rivela un aspetto nuovo una volta ottenuta la soluzione.

Per raggruppare opportunamente le domande ed i suggerimenti del nostro schema, distingueremo quattro fasi nello sviluppo del lavoro. Prima: si deve *comprendere* il problema; è necessario conoscere chiaramente cosa sia richiesto. Seconda: si devono scoprire i legami che intercedono fra le varie informazioni, fra ciò che si cerca ed i dati, per rendersi conto del tipo di risoluzione e compilare un *piano* conveniente. Terza: si procede allo *sviluppo del piano.* Quarta: bisogna *esaminare attentamente* il risultato ottenuto e procedere alla sua verifica ed alla sua discussione.

Ciascuna di queste fasi ha un'importanza particolare. Può avvenire che ad uno studente si presenti un'idea straordinariamente luminosa dalla quale la risoluzione scaturisce con un'immediatezza che rende superfluo il ricorso allo schema. Naturalmente simili intuizioni felici sono oltremodo desiderabili, mentre è molto penoso il caso di un alunno che passa per tutte e quattro le fasi precedenti senza ricavarne alcuna ispirazione. Ma è ancora peggio quando un allievo inizia a fare calcoli o costruzioni senza avere *capito* il problema, perché, in generale, non porta alcun vantaggio entrare nel vivo della questione senza avere prima compreso l'intimo significato di essa ed avere compilato un *piano.* Se, nello sviluppo di questo piano, lo studente avrà cura di *verificare ogni passaggio*, potranno essere evitati molti errori. Se l'alunno trascurerà di esaminare nuovamente e *verificare* il risultato, potranno sfuggirgli alcune deduzioni ed osservazioni importanti.

7. *La comprensione del problema.* — Non ha senso rispondere ad una domanda che non si è compresa. È duro lavorare per uno scopo che non si desidera. Simili cose sciocche e tristi tuttavia accadono spesso, nella scuola e fuori della scuola; ma un buon insegnante dovrebbe sforzarsi di impedire che esse si verifichino nella sua classe. Lo studente dovrebbe capire il problema e, di piú, dovrebbe desiderare di conoscerne la soluzione. Non è sempre tutta colpa dell'alunno se questa comprensione e questo desiderio man-

cano; i problemi dovrebbero essere scelti con cura, né troppo difficili né troppo facili, semplici ed interessanti; e spesso essi dovrebbero essere presentati in una forma gradevole, piana ed atta a risvegliare la curiosità dei giovani.

Innanzitutto, deve risultare comprensibile l'enunciato del problema. L'insegnante può, almeno fino ad un certo punto, agevolare tale comprensione; si chieda agli studenti di ripetere l'enunciato: essi dovrebbero essere in grado non solo di illustrare il problema con facilità, ma anche di distinguerne le parti principali, l'incognita, i dati, la condizione. Allora l'insegnante può sorvolare sulla domanda: *Qual è l'incognita? Quali sono i dati? Qual è la condizione?*

L'alunno dovrebbe considerare le parti principali del problema con molta attenzione, piú volte e da vari punti di vista. Se vi è una figura connessa con il problema, egli potrebbe *disegnare una figura* opportuna e segnare sopra di essa l'incognita ed i dati introducendo, se necessario, un *conveniente sistema di notazioni*; riguardo poi alla scelta dei segni, sarà indispensabile che egli consideri soprattutto quegli enti ai quali corrisponde una scelta di segno. In questa fase preliminare, può essergli utile, anche se non ci si può attendere una risposta esauriente ma una risposta vaga simile ad una semplice congettura, la seguente domanda: *È possibile soddisfare alla condizione?*

(Nella seconda parte di questo volume, la "comprensione del problema" si realizza in due stadi successivi: *Primi contatti con il problema* e *Approfondimento della comprensione del problema.*)

8. *Esempio.* — Illustriamo alcuni dei concetti esposti nel paragrafo precedente. Si consideri il seguente problemino: *Calcolare la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo, del quale si conoscono le tre dimensioni.*

Per risolvere un problema di questo genere con un certo profitto, gli studenti dovrebbero possedere una certa familiarità con il teorema di Pitagora e con qualche applicazione del medesimo in geometria piana, mentre non è necessario che essi abbiano conoscenze approfondite di geometria solida. L'insegnante può qui fare affidamento sulla naturale simpatia dei ragazzi per le questioni dello spazio.

Egli può rendere il problema piú interessante trasformandolo in un'applicazione concreta. L'aula è un parallelepipedo rettangolo le cui dimensioni possono essere misurate direttamente; gli alunni devono allora calcolare la misura della diagonale dell'aula, ossia eseguirne una "misurazione indiretta".

L'insegnante indica la lunghezza, la larghezza, l'altezza dell'aula e, con un largo gesto di una mano, la diagonale; in questo modo egli anima la figura che è stata precedentemente disegnata sulla lavagna e che ora apparirà l'immagine dell'aula.

Il dialogo fra l'insegnante e gli studenti può quindi iniziare cosí:

"*Qual è l'incognita?*"

"La misura della diagonale di un parallelepipedo".

"*Quali sono i dati?*"

"Le dimensioni del parallelepipedo."

"*Si introduca un conveniente sistema di notazioni.* Quale lettera si introdurrà per denotare l'incognita?"

"La lettera x."

"E quali lettere per le misure della lunghezza, dell'altezza e della larghezza del parallelepipedo?"

"Le lettere a, b, c."

"Qual è la condizione che intercede fra a, b, c ed x?"

"x è la misura della diagonale di un parallelepipedo di cui la lunghezza, la larghezza e l'altezza misurano rispettivamente a, b e c."

"Si tratta di un problema logico? Cioè, *la condizione è sufficiente a determinare l'incognita*?"

"Sí. La conoscenza di a, b e c individua il parallelepipedo. E, se il parallelepipedo è determinato, è determinata anche la misura della sua diagonale."

9. *La compilazione di un piano.* — Possiamo dire di avere realizzato un piano quando conosciamo, anche solo per linee generali, quali calcoli, computi oppure costruzioni si devono eseguire per ottenere l'incognita. Il cammino che, dalla comprensione del problema, conduce alla concezione di un piano può risultare lungo e tortuoso. Infatti la compilazione di un piano è l'impresa piú ardua nella risoluzione di un problema; essa può procedere per gradi. Oppure, dopo alcuni tentativi all'apparenza infruttuosi, all'improvviso può presentarsi, come un lampo, una "idea luminosa". Il miglior aiuto che un insegnante possa dare ai suoi allievi consiste nell'ispirare loro delle brillanti intuizioni mediante un'assistenza discreta. Le domande ed i suggerimenti che abbiamo intenzione di analizzare hanno appunto lo scopo di suscitare simili idee felici.

Per valutare la preparazione dello studente, l'insegnante dovrebbe ricordare le proprie esperienze, le difficoltà che egli stesso ha incontrato ed i successi che ha conseguito nella risoluzione di problemi.

Naturalmente è difficile avere un'idea geniale quando non si conosce a fondo l'argomento ed è impossibile quando non se ne abbia alcuna conoscenza. Le buone idee si fondano sull'esperienza precedente e su cognizioni già acquisite. Una vaga reminiscenza non basta a suscitare un'ispirazione felice, ma non si può sperare di avere un'idea brillante se non si ricordano verità piú o meno intimamente connesse con l'argomento che si sta trattando; per costruire una casa non sono sufficienti i vari materiali, ma è anche vero che non è possibile costruire una casa senza poter disporre di tutti i materiali necessari. Per risolvere un problema di matematica sono indispensabili alcune informazioni di una certa importanza dedotte da conoscenze matematiche acquisite in precedenza: problemi già risolti o teoremi già dimostrati. Per questo motivo spesso appare utile cominciare con la domanda: *È noto un problema connesso con questo?*

La difficoltà è rappresentata dall'esistenza, in generale, di troppi problemi connessi in qualche modo con quello che si sta trattando, ossia dotati di punti di contatto con questo. Come scegliere allora, in tale varietà, quello, oppure quei pochi, che risulti effettivamente di utilità? C'è un suggerimento che mette in risalto la caratteristica comune essenziale: *Si rifletta sull'incognita! E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga.*

Si è fortunati quando si riesce a ricordare un problema già risolto che sia intimamente legato a quello attuale e bisognerebbe approfittare di questa fortuna impiegandola con profitto: *Ecco un problema connesso con quello proposto e risolto precedentemente. È possibile sfruttarlo?*

Spesso le precedenti domande, se ben comprese e prese in seria considerazione, schiudono la via ad una buona idea; ma esse non aiutano sempre, perché, dopo tutto, non rappresentano una formula magica per il successo. Se esse non si rivelano proficue, è necessario ripiegare su qualche altro punto di contatto piú conveniente e considerare i vari aspetti del problema dato; si deve allora procedere ad una variazione, ad una trasformazione, ad una modifica del medesimo. *Si può enunciare il problema in altra forma?* Alcune domande del nostro schema accennano a particolari variazioni di un problema, quali la generalizzazione e la particolarizzazione, la trasformazione per analogia, la considerazione di una parte soltanto di condizione, e cosí via; occorrerebbe però precisare tali concetti, ma in questo momento non intendiamo soffermarci su di essi. Tuttavia richiamiamo fin d'ora l'attenzione del lettore sul fatto che la variazione del problema può condurre alla considerazione di opportuni problemi ausiliari: *Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo.*

Mediante l'applicazione successiva di numerosi problemi oppure teoremi noti, considerando varie modificazioni e ricorrendo a diversi problemi ausiliari, ci si può tuttavia trovare ad un certo momento cosí lontani dal problema di partenza da correre il rischio di smarrirsi per la via. Ma un'ottima domanda serve a riportare alla realtà: *Si è fatto uso di tutti i dati? È stata considerata l'intera condizione?*

10. *Esempio.* — Riprendiamo l'esempio dell'ottavo paragrafo. Eravamo rimasti al punto in cui gli studenti, compreso il problema, cominciavano ad interessarsi ad esso. Può essere che nessuna idea originale si presenti spontaneamente alle loro menti. L'insegnante, se non avverte alcun sintomo di progresso da parte della scolaresca, dopo avere atteso pazientemente, deve riprendere sollecito il dialogo con gli alunni. Egli deve essere pronto a ripetere con una qualche modifica quelle domande a cui gli studenti non sanno rispondere da soli; deve essere preparato a scontrarsi spesso con lo sconcertante silenzio degli allievi (che, nel contesto, sarà indicato con puntini di sospensione . . .).

"*È noto un problema connesso con questo?*"

. . .

"*Si rifletta sull'incognita! È noto un problema avente la stessa incognita?*"

. . .

"Suvvia! *Qual è l'incognita?*"

"La misura della diagonale di un parallelepipedo."

"Ricordate qualche *problema con la stessa incognita?*"

"No. Non abbiamo risolto nessun problema sulla diagonale di un parallelepipedo."

"È noto qualche *problema avente un'incognita analoga?*"

. . .

"Badate, la diagonale è un segmento. Non avete proprio mai risolto un problema in cui si cercasse la misura di un segmento?"

"Naturalmente! Abbiamo risolto problemi siffatti; per esempio, abbiamo calcolato la misura di un lato di un triangolo rettangolo."

"Bene! *Ecco un problema connesso con il nostro e risolto in precedenza. È possibile sfruttarlo?"*

. . .

"Siete stati abbastanza fortunati a ricordare un problema connesso con quello assegnato ed a voi già noto. Vi piacerebbe poterlo usare? *Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?*"

. . .

"Sentite, avete accennato ad un problema relativo ad un triangolo. Non vedete alcun triangolo nella vostra figura?"

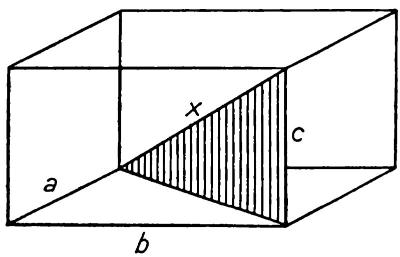


Fig. 1.

È sperabile che l'ultimo suggerimento risulti abbastanza chiaro da far nascere l'idea della risoluzione, fondata sulla considerazione di un triangolo rettangolo (tratteggiato nella figura 1) la cui ipotenusa sia la diagonale di misura incognita. Ma l'insegnante non si scoraggi se neppure questa traccia cosí limpida si rivela sufficiente a dissipare la pigrizia mentale della scolaresca; piuttosto egli si prepari a sciorinare un'intera gamma di suggerimenti sempre piú espliciti.

"Vi servirebbe un triangolo in figura?"

"E che tipo di triangolo vi farebbe piú comodo?"

"Non siete ancora in grado di calcolare la misura della diagonale, ma dite di saper calcolare quella di un lato di un triangolo rettangolo. Allora cosa volete fare?"

"Sapreste risolvere il problema, se la diagonale fosse il lato di un triangolo?"

Quando finalmente, dopo essere stati piú o meno aiutati, gli studenti riescono ad introdurre l'elemento ausiliario fondamentale, ossia il triangolo rettangolo tratteggiato nella figura 1, prima di permettere loro di iniziare i calcoli effettivi l'insegnante dovrebbe accertarsi che la scolaresca possieda ora una netta visione della questione.

"Penso che il disegnare questo triangolo sia stata una buona idea. Adesso avete un triangolo; ma potete risolvere il problema iniziale?"

"Si chiede la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo; la si può determinare applicando il teorema di Pitagora."

"Certo, se conoscete i cateti, però; ma essi sono veramente noti?"

"Un cateto è dato e la sua misura è c. Non deve essere difficile determinare la misura dell'altro; infatti esso è l'ipotenusa di un altro triangolo rettangolo."

"Benissimo! Mi sembra che ora il piano di risoluzione sia completo."

11. *Lo sviluppo del piano.* — Compilare un piano, intuire una risoluzione non sono cose facili. Il successo dipende da molti fattori; sono indispensabili non poche cognizioni già acquisite, un particolare abito mentale, la facoltà di sapere concentrarsi sul problema ed infine un pizzico di fortuna. Lo sviluppo del piano è invece un'impresa molto piú semplice; richiede soprattutto pazienza e precisione.

Il piano fornisce un abbozzo generale; ci si deve convincere che i dettagli rientrano necessariamente in tale traccia e quindi vanno esaminati ad uno ad uno, pazientemente, finché ciascuno di essi risulti perfettamente chiaro e non resti nessun punto oscuro ove possa celarsi qualche errore.

Se lo studente ha ben assimilato un piano, l'insegnante può concedersi qualche istante di relativa tranquillità. Il peggior pericolo è che l'allievo dimentichi la traccia: ciò può accadere facilmente quando questi si sia limitato ad ascoltare gli altri compagni ed abbia accettato passivamente il piano dalle autorevoli labbra dell'insegnante. Invece l'alunno che si sia sforzato di lavorare da solo, sia pure con qualche aiuto superiore, ed abbia raggiunto la sicurezza della risoluzione assaporando la gioia del ritrovamento dell'idea, non perderà con tanta facilità la traccia. Ma l'insegnante farà bene ad insistere affinché gli studenti procedano alla *verifica di ogni passaggio.*

Dell'esattezza di un passaggio ci si può convincere o "intuitivamente" o "formalmente". Si può concentrarsi nell'analisi del punto sotto osservazione, finché non resti dubbio circa la sua correttezza; oppure si può giungere alla stessa certezza ricorrendo a regole formali. (La differenza fra "indagine" e "verifica formale" è evidente in numerosi casi importanti; precisazioni piú sottili intorno a questa distinzione rientrano nell'ambito della filosofia.)

Comunque è indispensabile che l'alunno sia seriamente convinto dell'esattezza di ciascun passaggio. In alcune circostanze, l'insegnante può soffermarsi a sottolineare la differenza fra "riconoscere" e "dimostrare": *Si può riconoscere manifestamente che ogni passaggio è esatto?* Ma *si può* anche *dimostrarne l'esattezza?*

12. *Esempio.* — Riprendiamo dalla fine del decimo paragrafo. Supponiamo che finalmente uno studente abbia afferrato il concetto che sta alla base della risoluzione di quel problema. Ora egli vede il triangolo rettangolo del quale un cateto e l'ipotenusa misurano rispettivamente c ed x; l'altro cateto è la diagonale di una faccia del parallelepipedo. Sarebbe bene suggerire all'alunno di introdurre un'altra notazione conveniente; egli potrebbe, per esempio, designare con y la misura dell'altro cateto, ossia della diagonale della faccia del parallelepipedo avente lati di misura a e b. Cosí si metterebbe in evidenza il concetto fondamentale della dimostrazione, che consiste appunto nel ricorrere ad un problema ausiliario la cui incognita è y. Considerando successivamente i due suddetti triangoli rettangoli, l'alunno potrà scrivere le due relazioni (v. fig. 1):

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2;$$

e di qui, eliminando l'incognita ausiliaria y, otterrebbe:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

L'insegnante non ha motivo di interrompere lo studente se questi procede speditamente in questo sviluppo, ma può rammentargli di *verificare ogni passaggio.* Precisamente, egli può chiedergli:

"*Si può riconoscere manifestamente che il triangolo i cui lati misurano x, y e c è rettangolo?*"

Lo studente risponderà in piena coscienza di sí, ma potrebbe restare seriamente imbarazzato se l'insegnante, non soddisfatto della convinzione intuitiva del ragazzo, insistesse:

"Ma *si può dimostrare* che esso è un triangolo rettangolo?"

Si dovrebbe però evitare questa domanda almeno finché la scolaresca non abbia qualche dimestichezza con la geometria solida. Anche allora, poi, resta sempre un pericolo: quello che il rispondere ad una siffatta domanda marginale si riveli in effetti la difficoltà maggiore per quasi tutti gli studenti.

13. *Alla fine.* — Persino gli studenti migliori, quando hanno ottenuto la soluzione del problema e hanno copiato in bella il loro esercizio, chiudono il quaderno e passano ad altro. In tale modo, essi trascurano una fase del lavoro tanto importante quanto istruttiva. Conseguito il risultato finale, proprio attraverso la considerazione di questo e l'esame del procedimento con cui esso è stato ottenuto, l'alunno potrebbe approfondire le proprie conoscenze e sviluppare la propria abilità a risolvere problemi. Un bravo insegnante dovrebbe riuscire a fare comprendere, ed inculcare ai suoi allievi la consapevolezza, che nessun problema di matematica può essere considerato definitivamente chiuso. Resta sempre qualcosa da dire ancora sopra di esso; con uno studio ed un'applicazione accurati, si può perfezionare qualunque risoluzione e, in ogni caso, si può sempre giungere ad una piú profonda comprensione del risultato.

Supponiamo che lo studente abbia ora sviluppato il suo piano e abbia risolto per scritto il problema, verificando ogni passaggio. Egli ha quindi il diritto di ritenere esatta la sua soluzione. Ma è sempre possibile commettere qualche errore, soprattutto se il procedimento è lungo e laborioso. Quindi è opportuno verificare. Non si sorvoli in particolare su quegli accorgimenti rapidi ed intuitivi, atti a provare la validità del risultato oppure del ragionamento. *Si può verificare il risultato? Si può verificare il procedimento?*

Per convincersi dell'esistenza oppure della qualità di un oggetto, è necessario vederlo oppure toccarlo. E, come ogni percezione è piú precisa se confermata da due sensi distinti, cosí è preferibile trarre la certezza da due prove diverse: *Si può ottenere il risultato in altro modo? Lo si può vedere a colpo d'occhio?* Infatti è naturale preferire, ad un procedimento lungo e difficoltoso, una via semplice ed intuitiva.

Uno dei principali e piú importanti doveri dell'insegnante è di non lasciare mai negli alunni l'impressione che i problemi di matematica siano slegati fra loro e che nessuna relazione intercorra fra questi problemi e quelli di altro genere. L'esame della soluzione di ogni problema offre spontaneamente l'opportunità di discutere intorno a connessioni siffatte. Gli studenti si interesseranno profondamente a questo esercizio se, essendosi impegnati veramente nella risoluzione del problema assegnato, hanno raggiunto la consapevolezza di avere ottenuto un risultato esatto. In tale caso, essi si mostrano spesso impazienti di trovare qualche complemento alle loro conclusioni e di riuscire a scoprire come poter risolvere altrettanto bene un altro problema. L'insegnante sproni gli alunni ad inventare esercizi ai quali sia applicabile il procedimento (oppure il risultato) valido per il problema proposto. *Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema?*

14. *Esempio.* — Nel dodicesimo paragrafo, avevamo supposto che gli studenti avessero finalmente ottenuto la soluzione: Essendo a, b e c le misure dei tre spigoli uscenti da uno stesso vertice di un parallelepipedo rettangolo, la misura della diagonale del medesimo solido risulta

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Si può verificare il risultato? L'insegnante non può attendersi una risposta precisa a questa domanda da parte di studenti cui manchi un certo esercizio. Tuttavia gli alunni dovrebbero imparare quasi subito che i problemi letterali presentano un grande vantaggio sopra quelli numerici: il risultato di un problema letterale è suscettibile di numerose verifiche che invece non si possono affatto eseguire sul risultato di un problema numerico. Il nostro esempio, malgrado la sua grande semplicità, è sufficiente a mettere in risalto questa circostanza. L'insegnante può ispirarsi al risultato ottenuto per rivolgere agli studenti parecchie domande alle quali essi dovrebbero rispondere prontamente: "Sí." Una risposta negativa segnalerebbe una grave falla nel risultato.

"*Si è fatto uso di tutti i dati?* Nella formula ottenuta entrano tutti i dati, ossia a, b e c?"

"Nell'esercizio proposto, la lunghezza, la larghezza e l'altezza del parallelepipedo giocano un medesimo ruolo; il problema considerato è, come si dice, simmetrico rispetto ad a, b e c. Anche l'espressione conseguita per l'incognita è simmetrica nelle stesse quantità? Ossia, essa rimane invariata comunque si permutino fra loro a, b e c?"

"Si tratta di un problema di geometria solida; si cerca la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo di assegnate dimensioni a, b e c. È un problema analogo ad un problema di geometria piana, precisamente a quello della determinazione della misura della diagonale di un rettangolo di dimensioni assegnate a, b. Il risultato del problema spaziale è analogo al risultato di quello piano?"

"Quando c diminuisce con continuità fino ad annullarsi, il parallelepipedo si trasforma in un parallelogrammo. Ponendo nell'espressione del risultato $c = 0$, si ottiene l'esatta espressione della misura della diagonale del suddetto rettangolo?"

"Al crescere dell'altezza c del parallelepipedo, aumenta la lunghezza della sua diagonale. Il risultato è conforme a questa circostanza?"

"Se le tre misure a, b e c vengono moltiplicate per un medesimo fattore, per questo stesso fattore risulta moltiplicata la misura della diagonale. Per esempio, se al posto di a, b e c si ponesse ordinatamente $12a$, $12b$ e $12c$, anche il valore dell'incognita dovrebbe risultare moltiplicato per 12 rispetto a quello dianzi ottenuto. È proprio cosí?"

"Se a, b e c sono le misure quando come unità si scelga il metro, il risultato esprime la misura in metri della diagonale; ma esso deve continuare a valere anche quando si assuma per unità di misura, per esempio, il centimetro. Avviene cosí?"

(In realtà, le ultime due domande sono equivalenti; v. *Verifica dimensionale.*)

Questi interrogativi producono, in generale, ottimi frutti. Innanzitutto, uno studente intelligente non può fare a meno di restare colpito dal fatto che una formula sia suscettibile di tante verifiche. Egli era semplicemente convinto che essa fosse esatta solo perché si sentiva sicuro di averla ricavata in modo corretto; ora è convinto piú profondamente e questo incremento di fiducia proviene da una diversa fonte: esso nasce da una specie di "evidenza sperimentale". In secondo luogo, in virtú delle domande precedenti acquistano un nuovo significato anche i particolari della formula che rivelano insospettati legami con altre questioni. In tal modo il risultato ha piú probabilità di essere ricordato anche nel seguito e le conoscenze dell'alunno si accrescono di numero. Infine queste stesse domande possono essere facilmente impiegate anche in problemi analoghi ed uno studente perspicace può cosí intuirne gli intimi concetti informatori: l'impiego di tutti i dati, la variazione dei medesimi, la simmetria, l'analogia. Se egli si abituerà a focalizzare la sua attenzione sopra questi punti, diverrà in breve tempo molto abile a risolvere i problemi.

Si può verificare il procedimento? Procedere ad una verifica del procedimento, passaggio per passaggio, può essere indispensabile in casi importanti e particolarmente irti di difficoltà. Di solito è sufficiente prendere in considerazione i punti "spinosi". Cosí, nell'esempio considerato anche al paragrafo dodicesimo, è conveniente, una volta ottenuto il risultato, ritornare su quella questione che non giudicammo opportuno affrontare prima di avere condotto a termine la risoluzione: Si può *dimostrare* che il triangolo i cui lati misurano a, b e c è rettangolo?

Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema? Con un minimo incoraggiamento e dopo aver visto un esempio o due, gli studenti trovano senza difficoltà delle applicazioni che consistono essenzialmente nel presentare qualche *interpretazione concreta* degli enti matematici teorici del problema proposto. Identificando il parallelepipedo rettangolo dell'enunciato del nostro solito esempio con l'aula, anche l'insegnante è ricorso ad un'interpretazione siffatta. Un alunno un po' tonterello può proporre, come applicazione, di calcolare la misura della diagonale di un ristorante invece della misura della diagonale dell'aula. Se gli altri studenti non trovano spontaneamente esempi piú significativi, l'insegnante può proporre un problema leggermente diverso da quello dianzi considerato; per esempio: "Note le tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, si calcoli la distanza del centro di tale solido da uno dei suoi vertici."

Gli studenti possono applicare cosí il *risultato* del problema precedente, osservando che la distanza ora richiesta è la metà della diagonale di cui è stata prima calcolata la misura. Oppure essi possono sfruttare quel procedimento, ossia lo stesso *metodo*, ricorrendo alla considerazione di convenienti triangoli rettangoli (ciò è tuttavia poco probabile, poiché tale costruzione qui risulta molto meno evidente e piú confusa che dianzi).

Dopo avere mostrato questa applicazione, l'insegnante potrebbe discutere sulla configurazione delle quattro diagonali di un parallelepipedo rettangolo e sulle sei piramidi ciascuna delle quali ha come base una faccia dello stesso solido, come vertice il suo centro e come spigoli laterali le semidiagonali. Quando l'immaginazione della scolaresca sia stata abbastanza eccitata, l'insegnante potrebbe ritornare sulla domanda: *Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema?* Infatti ora c'è maggiore probabilità che gli studenti riescano a trovare applicazioni piú significative, quali, per esempio, la seguente:

"Si deve issare un pennone alto 8 metri al centro di un terrazzo rettangolare che copre un edificio e che è lungo 21 metri e largo 16 metri. Il pennone è sostenuto da quattro cavi eguali, ciascuno dei quali sarà fissato sul pennone a 2 metri sotto la cima e termina ad un vertice del terrazzo. Quanto misura ogni cavo?"

Gli alunni possono sfruttare il *metodo* del problema già risolto, introducendo un triangolo rettangolo in un piano verticale ed un altro in un piano orizzontale. Oppure essi possono sfruttare il *risultato*, immaginando un parallelepipedo rettangolo di cui uno dei cavi è una diagonale, x, ed i cui spigoli misurano, in metri, rispettivamente

$$a = 10{,}5 \qquad\qquad b = 8 \qquad\qquad c = 6.$$

Come immediata applicazione della formula precedente, risulta $x = 14{,}5$ (essendo x la misura in metri della diagonale).

Per altri esempi, v. *Si può sfruttare il risultato?*

15. *Approcci diversi.* — Riprendiamo per un momento il problema considerato nei paragrafi 8, 10, 12 e 14. La maggiore difficoltà, ossia la compilazione del piano, è stata analizzata nel paragrafo 10. A tale proposito, si può osservare che l'insegnante avrebbe potuto procedere anche in modo diverso. Prendendo l'avvio esattamente come abbiamo riferito all'inizio del suddetto paragrafo, egli avrebbe potuto seguire una linea di azione completamente diversa, cominciando a domandare ai suoi studenti:

"*È noto un problema connesso con questo?*"

"Si conosce un *problema analogo?*"

"Il problema proposto è un problema di geometria solida. Ricordate un problema analogo, piú semplice, di geometria piana?"

"Vedete, il problema proposto si riferisce ad una figura spaziale; tratta, precisamente, della diagonale di un parallelepipedo rettangolo. Quale potrebbe essere un problema analogo relativo ad una figura piana? Un problema di questo tipo dovrebbe riferirsi alla... diagonale... di un..."

"... rettangolo!"

Gli studenti che, anche se per scarsa capacità o per pigrizia non hanno saputo fino a questo momento avanzare nessuna congettura, sono finalmente costretti a collaborare almeno in minima parte alla formulazione dell'idea. Inoltre, se gli alunni si dimostrano veramente cosí lenti, l'insegnante non affronti questo problema relativo al parallelepipedo se non ha prima preso in considerazione il problema analogo concernente il rettangolo. Allora, egli può continuare anche cosí:

"*Ecco un problema analogo connesso con quello proposto e risolto precedentemente. È possibile sfruttarlo?*"

"Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?"

Infine, l'insegnante potrebbe anche tentare di suggerire ai suoi allievi quest'altra idea molto elegante: quella di considerare la diagonale del parallelepipedo rettangolo assegnato come la diagonale di un conveniente parallelogrammo e precisamente del rettangolo, costruibile in figura, intersezione dello stesso parallelepipedo con il piano passante per due spigoli opposti del medesimo. Si tratta di un'idea essenzialmente identica a quella dianzi seguita (v. par. 10), ma apparentemente diversa. Nel paragrafo 10 il contatto con l'effettiva capacità degli studenti era stabilito attraverso l'incognita; un problema precedentemente risolto veniva ricordato perché esso presentava la stessa incognita di quello proposto. Qui il contatto con l'idea della risoluzione ha origine nell'analogia fra due problemi.

16. *Il metodo dell'insegnante.* — Il metodo dell'insegnante, quale risulta dai precedenti paragrafi 8, 10, 12, 14 e 15, può essere cosí riassunto nei suoi tratti caratteristici: Iniziare con una domanda od un suggerimento di carattere generale e, se necessario, ricorrere via via a domande o suggerimenti sempre piú specifici e particolari, finché dalla mente dell'alunno scaturisca una risposta o un'idea. Volendo aiutare lo studente ad afferrare questa idea, riprendere, se possibile, una domanda o un suggerimento di carattere generale, salvo porgere di nuovo, se necessario, una domanda o suggerimento piú particolari; e cosí di seguito.

Naturalmente il nostro schema è un semplice abbozzo; esso tuttavia si rivela utile in quasi tutti i casi non troppo complessi. Ma è chiaro che potrebbe essere perfezionato. Comunque è importante iniziare con suggerimenti semplici, naturali e validi in generale; la loro sequenza dovrebbe essere piuttosto breve.

I suggerimenti devono essere semplici e naturali, altrimenti essi non aiuteranno *con discrezione.*

I suggerimenti devono essere di carattere generale, applicabili non solo al problema che si sta trattando, ma a problemi di ogni tipo, affinché essi servano veramente ad accrescere l'*abilità* dello studente e non solo a fornirgli una certa tecnica.

La sequenza dei medesimi deve essere breve, in modo che le domande possano venir ripetute sovente, con naturalezza e in diverse occasioni; allora è probabile che queste vengano assimilate dall'alunno e contribuiscano efficacemente allo sviluppo della sua *formazione mentale.*

È necessario ricorrere a suggerimenti sempre piú specifici, affinché lo studente *collabori* il piú possibile.

Questo metodo è suscettibile di flessioni; e per fortuna è tale, perché in matematica ogni procedimento rigido, meccanico, prestabilito nei minimi particolari, è necessariamente dannoso. Il nostro metodo ammette invece una certa elasticità e delle possibili variazioni, lascia liberi della scelta di approcci diversi (v. par. 15), può e dovrebbe essere applicato in modo che le domande rivolte dall'insegnante siano le stesse che *potrebbero affacciarsi anche alle labbra dell'alunno.*

Il lettore che volesse sperimentare nella sua classe il metodo qui indicato dovrebbe, naturalmente, procedere con qualche cautela. Dovrebbe meditare coscienziosamente sull'esercizio presentato nel paragrafo 8 nonché sugli esempi dei paragrafi 18, 19 e 20; inoltre sarebbe bene che egli preparasse con molta cura gli esempi che a sua volta intende discutere, prendendo in seria considerazione i diversi approcci possibili, ed infine che non tralasciasse di fare qualche tentativo per rendersi conto della sua abilità a maneggiare il medesimo metodo, delle eventuali reazioni degli studenti e del tempo necessario.

17. *Domande efficaci e domande controproducenti.* — Il metodo esposto nei paragrafi precedenti, se ben assimilato, consente di valutare per confronto l'efficacia di determinati suggerimenti che possono essere avanzati con l'intenzione di aiutare gli studenti.

Riprendiamo dall'inizio del decimo paragrafo e, precisamente, dalla domanda: "*È noto un problema connesso con questo?*" Nell'intenzione piú sincera di aiutare i suoi alunni, l'insegnante avrebbe potuto invece domandare: "*Si può applicare il teorema di Pitagora?*"

L'intenzione è ottima, ma il quesito è forse il peggiore che potesse essere posto. Cerchiamo di farci un'idea delle circostanze in cui è rivolta questa domanda; verranno spontanee numerose obiezioni ad un "aiuto" siffatto.

1) L'alunno può comprendere il suggerimento implicito nella domanda, se egli è sul punto di trovare la risoluzione; ma è del tutto probabile che non capisca il motivo del quesito dell'insegnante, se non vede ancora la via da seguire. Quindi la domanda precedente non fornisce alcun aiuto proprio a chi, invece, ne ha maggiormente bisogno.

2) Se il suggerimento viene compreso, esso dice tutto ed all'alunno resta ormai ben poco da fare.

3) Il suggerimento è troppo specifico. Lo studente può farne uso nella risoluzione del problema in istudio, ma non ne ricava alcun ammaestramento per altri esercizi. Non è dunque una domanda istruttiva.

4) L'alunno potrà anche comprendere il suggerimento, ma difficilmente riuscirà a spiegarsi come possa essere venuta all'insegnante l'idea di rivolgergli una simile domanda. In che modo potrebbe, spontaneamente, un ragazzo pensare ad un simile quesito? Agli occhi di un allievo tutto ciò assume l'aspetto di un fatto sorprendente, ma innaturale, come il rinvenimento di un coniglio entro il cappello di un prestigiatore. Ed anche questo, in realtà, è molto poco istruttivo.

Nessuna di queste obiezioni, invece, può essere mossa contro il procedimento descritto nei paragrafi 10 e 15.

Altri esempi

18. *Un problema di costruzione. — In un triangolo assegnato, inscrivere un quadrato avente due vertici sulla base e ciascuno degli altri due vertici su un lato del triangolo.*

"*Qual è l'incognita?*"

"Un quadrato."

"*Quali sono i dati?*"

"Soltanto un triangolo."

"*Qual è la condizione?*"

"Che i quattro vertici del quadrato appartengano al contorno del triangolo e, precisamente, due stiano sulla base e ciascuno degli altri due giaccia su un lato del triangolo."

"*È possibile soddisfare alla condizione?*"

"Ritengo di sí, ma non ne sono sicuro."

"Sembra che tu non trovi questo problema troppo facile. *Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo.* Si può soddisfare ad *una parte della condizione?*"

"Cosa si intende per *una parte della condizione?*"

"Ecco, la condizione riguarda tutti i vertici del quadrato; ossia quanti punti?"

"Quattro."

"Una parte della condizione dovrebbe riferirsi ad un numero di vertici minore di quattro. *Si tenga conto soltanto di una parte* *della condizione, trascurando l'altra.* Quale parte della condizione si presta ad essere soddisfatta più facilmente?"

"È immediato disegnare un quadrato con due vertici sul contorno del triangolo — od anche con tre vertici su di esso!"

"*Si disegni una figura!*"

Lo studente disegna la figura 2.

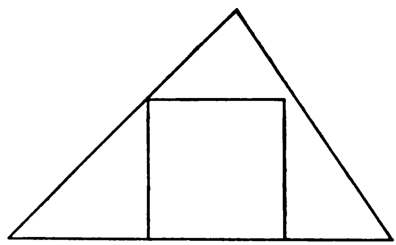


Fig. 2.

"Cosí *si è tenuto conto soltanto di una parte della condizione, trascurando l'altra. Fino a che punto risulta ora determinata l'incognita?*"

"Il quadrato richiesto non è ancora individuato: quello disegnato adesso ha solo tre vertici appartenenti al contorno del triangolo."

"Bene! *Si disegni un'altra figura!*"

Lo studente traccia la figura 3.

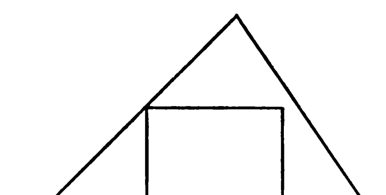


Fig. 3.

"Abbiamo detto che il quadrato non è determinato dalla *parte della condizione considerata. Come può variare?*"

. . .

"Tre vertici dei quadrati precedenti giacciono sul contorno del triangolo, ma il quarto vertice non è ancora dove dovrebbe stare. Il quadrato richiesto, come abbiamo già notato, non è fino a questo momento individuato; esso può variare e lo stesso accade per il suo quarto vertice. *Come può variare* questo punto?"

. . .

"Si facciano dei tentativi pratici, per vedere meglio. Si disegnino tanti quadrati, come quelli già considerati, aventi tutti tre i vertici sul contorno del triangolo: quadrati piccoli e quadrati grandi. Quale sembra essere il luogo descritto dai quarti vertici? *Come può* quindi *variare* il quarto vertice di ciascun quadrato siffatto?"

Quest'ultima domanda dovrebbe portare lo studente molto vicino alla risoluzione. Se l'alunno ora è in grado di riconoscere che il luogo geometrico dei quarti vertici dei quadrati è una retta, il problema può considerarsi risolto.

19. *Un problema di dimostrazione. — Due angoli giacciono su due piani distinti, ma ciascun lato dell'uno è parallelo ed equiverso al corrispondente lato dell'altro; dimostrare che due angoli siffatti sono eguali.*

Si tratta di un teorema fondamentale di geometria solida. Questa dimostrazione può essere proposta agli studenti che abbiano una certa familiarità con la geometria dello spazio e ne conoscano quei pochi concetti essenziali che precedono proprio tale teorema negli *Elementi* di Euclide. (La proposizione che abbiamo enunciata e che intendiamo dimostrare è precisamente la decima nel Libro XI di Euclide.) Il carattere corsivo verrà ora usato non solo in corrispondenza delle domande e dei suggerimenti del nostro schema, ma anche di altre domande ed altri suggerimenti che stanno con quelli nella medesima relazione in cui i "problemi di determinazione" stanno con i "problemi di dimostrazione". (Questa corrispondenza è analizzata sistematicamente in *Problemi di determinazione, problemi di dimostrazione*, nn. 5, 6.)

"*Qual è l'ipotesi?*"

"Due angoli giacciono in due piani distinti; ciascun lato dell'uno è parallelo ed equiverso al corrispondente lato dell'altro."

"*Qual è la tesi?*"

"I due angoli sono eguali."

"*Si disegni una figura. Si introduca un conveniente sistema di notazioni.*"

Lo studente tracci due angoli come mostra la figura 4 e, con l'aiuto piú o meno esplicito dell'insegnante, disponga le lettere nel modo ivi indicato.

"*Qual è l'ipotesi?* Ripetila, per favore, leggendo sul tuo disegno."

"Gli angoli *BAC* e *B'A'C'* giacciono su piani distinti ed i lati *AB* ed *AC* dell'uno sono paralleli ed equiversi rispettivamente ai lati *A'B'* ed *A'C'* dell'altro."

"*Qual è la tesi?*"

"Gli angoli *BAC* e *B'A'C'* sono eguali."

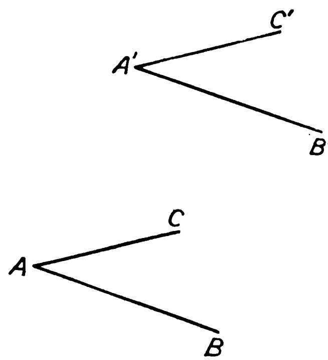


Fig. 4.

"*Si rifletta sulla tesi! E ci si sforzi di ricordare qualche teorema precedentemente dimostrato avente la stessa tesi oppure una tesi analoga.*"

"Due triangoli congruenti hanno gli angoli ordinatamente eguali."

"Benissimo! *Ecco un teorema connesso con quello proposto e dimostrato precedentemente. È possibile sfruttarlo?*"

"Ritengo di sí, ma non vedo ancora come."

"*Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?*"

. . .

"Bene, il teorema che hai citato cosí opportunamente riguarda i triangoli e, precisamente, una coppia di triangoli congruenti. Nella figura che hai disegnato, esistono dei triangoli?"

"No; ma è possibile tracciarne: basta congiungere *B* con *C* e *B'* con *C'* per ottenere i due triangoli *ABC* ed *A'B'C'*."

"Esatto. Ma a cosa servono questi triangoli?"

"A dimostrare la validità della tesi, ossia l'eguaglianza degli angoli *BAC* e *B'A'C'*."

"Va bene. A tale scopo come devono essere i due triangoli ausiliari?"

"Devono essere triangoli congruenti. Certo, devo scegliere B, C, B' e C' in modo che si abbia $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$."

"D'accordo. E adesso che cosa si vuole dimostrare?"

"Si vuole dimostrare che due triangoli $ABC = A'B'C'$ sono congruenti, da cui scende subito l'eguaglianza degli angoli BAC e $B'A'C'$."

"Giusto! Ecco una direzione nuova, ecco una nuova tesi da dimostrare. *Si rifletta sulla tesi! E ci si sforzi di ricordare qualche*

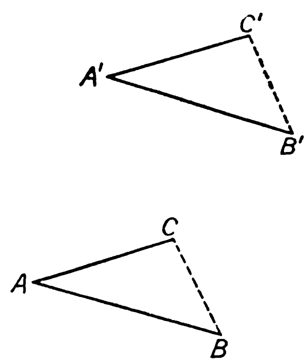


Fig. 5.

teorema precedentemente dimostrato avente la stessa tesi oppure una tesi analoga."

"Due triangoli sono congruenti se... se i tre lati dell'uno sono ordinatamente eguali ai tre lati dell'altro."

"Esatto. La scelta avrebbe potuto essere peggiore. Ora, *ecco un teorema connesso con quello proposto e dimostrato precedentemente. È possibile sfruttarlo?*"

"Sarebbe possibile, se si sapesse che BC è uguale a $B'C'$."

"Certo! E allora?"

"È necessario dimostrare l'eguaglianza dei lati BC e $B'C'$."

"*Ci si sforzi di ricordare qualche teorema precedentemente dimostrato avente la stessa tesi oppure una tesi analoga.*"

"Sí; esiste un teorema che conclude: '... allora i due segmenti sono eguali'. Ma qui non serve."

"*Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?*"

. . .

"Attenzione! Come si può dimostrare che BC è uguale a $B'C'$, quando nella figura fra questi due segmenti non compare alcun legame?"

. . .

"*Si è fatto uso dell'intera ipotesi? Qual è l'ipotesi?*"

"Abbiamo supposto i lati AB ed AC rispettivamente paralleli ed equiversi ai lati $A'B'$ ed $A'C'$. Certo, bisogna tenere conto di questo fatto."

"*Si è fatto uso dell'intera ipotesi?* Per esempio, hai detto che il lato AB è parallelo ed equiverso al lato $A'B'$, ma sappiamo solo questo intorno ai segmenti AB ed $A'B'$?"

"No; AB è anche eguale ad $A'B'$, per costruzione. E, per lo stesso motivo, AC è eguale ad $A'C'$."

"Due segmenti paralleli ed eguali... si tratta di una configurazione interessante. *È stata già considerata prima d'ora?*"

"Naturalmente! Sí! Un parallelogrammo! Risulta evidente congiungendo A con A', B con B' e C con C'."

"Non è una cattiva idea. Quanti parallelogrammi compaiono adesso in figura?"

"Due. No, tre. No, due. Cioè, la costruzione effettuata ha messo in risalto due quadrilateri che è immediato dimostrare essere in realtà due parallelogrammi ed un terzo quadrilatero che pure sembra un parallelogrammo. Spero di riuscire a dimostrare proprio tale fatto, perché allora sono a posto."

Già dalle risposte precedenti si sarebbe potuto comprendere che questo studente è un ragazzo di viva intelligenza, ma, dopo la sua ultima osservazione, non rimane alcun dubbio in merito.

Si tratta di un alunno capace di avanzare previsioni intorno a un risultato matematico e di comprendere chiaramente la differenza fra dimostrazione e congettura. Egli sa anche che le congetture possono essere piú o meno plausibili. Veramente, ha frequentato con profitto le lezioni di matematica, dimostra una certa abilità nel risolvere i problemi, è dotato di una profonda intuizione e sa sfruttare una buona idea.

20. *Un problema di calcolo differenziale. — Si versa dell'acqua in un recipiente a forma di cono circolare retto disposto con il vertice verso il basso e la base orizzontale; il liquido fluisce con velocità* v *costante ed il raggio della base e l'altezza del cono sono rispettivamente* a *e* b. *Si determini il tasso di variazione dell'altezza* y *del livello dell'acqua nel recipiente (misurata a partire dal*

punto piú basso) e se ne calcoli il valore quando siano a = 4 m, b = 3 m, v = 2 m³ al minuto ed y = 1 m.

Si suppone che lo studente conosca le piú semplici regole di derivazione ed il concetto di "tasso di variazione".

"*Quali sono i dati?*"

"Il raggio della base e l'altezza del recipiente conico, la quantità di acqua che entra ogni minuto nel cono e la quota della su-

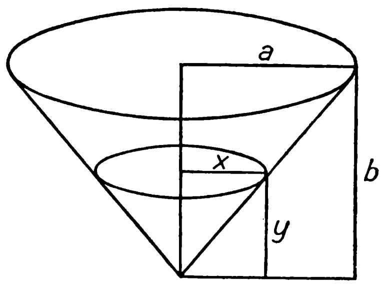


Fig. 6.

perficie libera del liquido ad un particolare istante; precisamente: $a = 4$ m, $b = 3$ m, $v = 2$ m³ al minuto, $y = 1$ m."

"Esatto. L'enunciato stesso del problema suggerisce di trascurare inizialmente i valori numerici, operando invece sulle lettere in modo da esprimere l'incognita in funzione di a, b, v, y; una volta ottenuta l'espressione letterale dell'incognita, basterà sostituire in essa i valori numerici suddetti. Accettiamo dunque questo suggerimento. Allora, *qual è l'incognita?*"

"Il tasso di variazione dell'altezza del livello dell'acqua quando la sua quota è y."

"Cosa vuol dire? Come si può dire con altre parole?"

"Il tasso di variazione della profondità dell'acqua."

"E ciò cosa significa? *Si può esprimere in altri modi?*"

"Il tasso di variazione del livello dell'acqua."

"D'accordo, il tasso di variazione di y. Ma cos'è il tasso di variazione? *Si ricorra alle definizioni.*"

"Il tasso di variazione di una funzione in un punto è il limite del rapporto incrementale della medesima funzione calcolato in quel punto."

"Ecco. Adesso, y è una funzione? Trascuriamo il particolare valore numerico di y dato dal problema; si può pensare che y vari?"

"Certo; y, la quota della superficie libera del liquido, aumenta con il passare del tempo."

"Ed allora y è funzione di quale variabile indipendente?"

"Del tempo t."

"Va bene. *Si introduca un conveniente sistema di notazioni.* Come si può scrivere in simboli matematici il tasso di variazione di y?"

"$\dfrac{dt}{dy}$."

"Esatto. Questa è dunque l'incognita che deve essere espressa in funzione di a, b, v, y. Comunque uno di questi dati è pure un tasso di variazione; quale?"

"v è il tasso di variazione dell'acqua nel recipiente."

"Ossia? Cerca di esprimerti meglio."

"v è il tasso di variazione del volume del liquido nel recipiente."

"E questo cosa significa? *Ci si può esprimere in altro modo*? Come si potrebbe scrivere con *una conveniente notazione*?"

"$v = \dfrac{dV}{dt}$."

"E V cosa sta ad indicare?"

"Il volume dell'acqua nel recipiente al generico istante t."

"Va bene. Ora è necessario esprimere $\dfrac{dy}{dt}$ in funzione di a, b, $\dfrac{dV}{dt}$, y. Come si può fare?"

. . .

"*Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo.* Se non risulta chiaro il legame fra $\dfrac{dy}{dt}$ ed i dati, vediamo di mettere in luce qualche relazione piú semplice che possa servire da trampolino."

. . .

"Non si vedono proprio altri legami? Per esempio y e V sono indipendenti fra loro?"

"No; al crescere di y, anche V aumenta."

"Ecco, questa è una relazione. E quale precisamente?"

"Dunque, V è il volume di un cono avente altezza y, ma di cui non si conosce il raggio di base."

"Tuttavia tale raggio può essere introdotto, indicandolo, tanto per fissare le idee, con la lettera x."

" Allora è $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$."

"Va bene. E adesso cosa si può osservare intorno ad x? È x indipendente da y?"

"No; quando la profondità dell'acqua, ossia y, aumenta, necessariamente aumenta anche il raggio della base del cono liquido, ossia x."

"Ecco dunque una connessione. E quale precisamente?"

"Risulta subito, dalla considerazione di triangoli simili:

$$x : y = a : b."$$

"Un altro legame, quindi. Io non trascurerei di approfittarne. Non si dimentichi che si cercava una relazione fra V ed y."

"Si ha:

$$x = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^3}{3b^2}$$

"Certo. Tutto ciò ha proprio l'aspetto di un trampolino, vero? Ma non si dimentichi dove si vuole arrivare. *Qual è l'incognita?*"

"Ebbene, $\frac{dy}{dt}$."

"Quindi si deve cercare una relazione fra $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ ed altre quantità, mentre se ne conosce una fra y, V ed altre quantità. Come fare?"

"Bisogna trovare una via. Derivare, naturalmente!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \frac{dy}{dt}."$$

"Ottimamente! E in quanto ai dati numerici?"

"Se ora $a = 4$ m, $b = 3$ m, $\frac{dV}{dt} = v = 2$ m^3 al minuto ed $y = 1$ m, risulta:

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \frac{dy}{dt}.$$

E di qui, finalmente:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{9}{\pi \times 8} \text{ m al minuto."}$$

Parte seconda

La risoluzione

Un dialogo

Primi contatti con il problema

Come iniziare? Si parta sempre dall'enunciato del problema.

Che fare? Si consideri il problema nel suo complesso con la massima precisione e realtà possibili. In un primo tempo, si sorvoli sui dettagli.

Che vantaggio si può conseguire procedendo cosí? Si comprende veramente il problema, si acquista con esso una certa familiarità, si imprime nella propria mente il fine a cui tende l'esercizio. Inoltre concentrarsi sul problema stimola la memoria e può rendere piú agevole il ricordare cognizioni pertinenti ad esso.

Approfondimento della comprensione del problema

Come iniziare? Si parta di nuovo dall'enunciato del problema. Si inizi a lavorare solo quando tale enunciato risulti cosí chiaro e cosí scolpito in mente da poter essere trascurato per qualche istante senza per altro venir dimenticato.

Che fare? Separare le parti principali del problema. In un problema di dimostrazione, le parti principali sono l'ipotesi e la tesi; in un problema di determinazione sono l'incognita, i dati e la condizione. Si analizzino le parti principali del problema proposto prendendole in considerazione ad una ad una, una dopo l'altra, ciascuna per se stessa e nei rapporti in cui è legata alle rimanenti; si esamini ogni particolare riferendolo agli altri dettagli ed al medesimo problema considerato nel suo complesso.

Che vantaggio si può conseguire procedendo cosí? Si dovrebbe riuscire a vedere ed a mettere in risalto quei particolari che, probabilmente, giocheranno un ruolo essenziale in seguito.

Ricerca di un'idea feconda

Come iniziare? Si cominci con il considerare le parti principali del problema e si inizi a lavorare solo quando queste parti principali si presentino, in virtú della precedente indagine, chiaramente distinte, limpide e ben assimilate.

Che fare? Si consideri il problema sotto vari punti di vista e se ne cerchino gli eventuali punti di contatto con le cognizioni già acquisite.

Si consideri il problema sotto vari punti di vista. Se ne mettano in risalto le diverse parti, si esaminino i particolari, si analizzi un medesimo particolare piú volte in modi però tutti distinti fra loro, si pongano in relazione i particolari in maniera diversa riguardandoli sotto vari aspetti. Si tenti di trovare, per ciascun dettaglio, un'interpretazione nuova e, analogamente, qualche interpretazione originale dell'intero problema.

Si cerchino gli eventuali punti di contatto con cognizioni già acquisite. Si tenti di ricordare qualche accorgimento rivelatosi utile in circostanze analoghe, di riconoscere nella questione in istudio qualche concetto già noto, di ricavare qualche informazione interessante in base all'analisi dianzi indicata.

Che vantaggio si può conseguire? Un'idea feconda, forse anche un'idea decisiva, che permetta di riconoscere a colpo d'occhio la via per ottenere il risultato esatto.

Come può un'idea risultare feconda? Un'idea è tale quando indica la via completa, oppure una parte di questa; essa suggerisce piú o meno esplicitamente, come si debba procedere. Le idee possono essere piú o meno complete, ma ci si stimi fortunati di averne almeno una.

Come comportarsi dinanzi ad un'idea incompleta? È necessario prenderla in seria considerazione ed analizzarla profondamente, se essa sembra vantaggiosa. Se tale indagine convince della possibile realizzazione della stessa idea, è bene rendersi conto di quale sia la sua portata, di quanto lontano essa possa condurre; quindi è opportuno procedere ad un ulteriore esame della situazione, che, proprio alla luce di questa idea, può apparire mutata. Si consideri tale diversa situazione da diversi punti di vista e si cerchino gli eventuali punti di contatto con cognizioni già note.

Che vantaggio si può conseguire procedendo cosí? Si può essere fortunati ed avere un'altra idea che forse condurrà speditamente alla soluzione. Oppure, a questo punto, saranno ormai sufficienti pochissime altre idee felici. Può anche avvenire che un'idea porti fuori strada, ma bisognerebbe essere contenti di tutte le idee nuove che possono presentarsi alla mente, anche di quelle meno efficaci, anche di quelle nebulose, anche di quelle che semplicemente chiariscono un poco quelle piú confuse oppure servono soltanto a correggere le meno felici. Persino nel caso in cui non si trovi per qualche tempo nessuna nuova idea di una certa importanza, ci si deve giudicare fortunati, se, intanto, la comprensione del problema è divenuta maggiore, piú completa, piú coerente, meno lacunosa e, in un certo senso, piú equilibrata.

Sviluppo del piano

Come iniziare? Si cominci dall'idea feconda che ha ispirato la risoluzione. Si inizi a lavorare solo quando ci si senta ben sicuri del possesso della chiave del problema e certi di saper superare le difficoltà minori che possono presentarsi.

Che fare? Procedere con la massima calma. Eseguire accuratamente tutte le operazioni algebriche oppure geometriche già previste. Accertarsi dell'esattezza di ogni passaggio attraverso una verifica formale oppure un'indagine intuitiva oppure, se possibile, in entrambi i modi. Se il problema è molto complesso, è opportuno distinguere i passaggi in "fondamentali" e "secondari", ogni passaggio fondamentale essendo costituito da piú passaggi secondari. Si verifichino prima sempre i passaggi fondamentali, passando in seguito all'esame dei secondari.

Che vantaggio si può conseguire procedendo cosí? Si esegue una risoluzione nella quale ogni passaggio è certamente esatto.

Alla fine

Come iniziare? Si cominci dalla soluzione, completa e corretta in ogni particolare.

Che fare? Si consideri la soluzione sotto vari aspetti e se ne cerchino gli eventuali punti di contatto con cognizioni precedentemente acquisite.

Si esaminino i dettagli della soluzione e si cerchi di esprimerli nella forma piú semplice; si esaminino le parti piú lunghe, sia nella risoluzione che nel risultato, e si tenti di condensarle; ci si sforzi di vedere la soluzione nel suo complesso a colpo d'occhio. Si modifichino opportunamente le parti troppo concise oppure troppo minuziose sia del procedimento che del risultato; si cerchi di perfezionare la risoluzione, di rendere intuitiva la risposta finale, di incastonarla il piú spontaneamente possibile nell'ambito del proprio sapere. Si analizzi il metodo che ha condotto al risultato, mettendone in luce i punti essenziali in modo da poterlo eventualmente applicare a qualche altro problema.

Che vantaggio si può conseguire procedendo cosí? Si possono scoprire una risoluzione diversa e forse migliore, verità nuove ed interessanti. In ogni caso, poi, prendendo l'abitudine di esaminare ed analizzare cosí la risoluzione di un problema, si acquista una conoscenza ben ordinata e vivace; l'abilità a risolvere problemi risulta notevolmente aumentata.

Parte terza

Breve compendio di nozioni di euristica[1]

L'autore nell'edizione originale americana ha posto i paragrafi della *Parte terza* in ordine alfabetico. Nell'edizione italiana non è stato possibile rispettare quest'ordine; però, poiché la successione è stata ispirata da considerazioni logiche, abbiamo ritenuto opportuno non modificarla, anche se ciò richiederà al lettore una maggiore fatica nel reperire i singoli paragrafi che, d'altra parte, troverà elencati a p. 250. [*N.d T.*]

Compendio di nozioni di euristica

Analogia. — Si tratta di una specie di somiglianza fra cose distinte. Oggetti somiglianti concordano fra loro sotto qualche aspetto, oggetti analoghi *concordano per determinate relazioni* che intercedono fra le loro parti corrispondenti.

1. Un rettangolo è analogo ad un parallelepipedo rettangolo; infatti fra i lati di tale parallelogrammo intercedono relazioni che assomigliano a quelle che sussistono fra le facce del parallelepipedo in questione.

Ogni lato del rettangolo è parallelo ad un altro lato soltanto e perpendicolare ai rimanenti lati.

Ogni faccia del parallelepipedo rettangolo è parallela ad un'altra faccia soltanto e perpendicolare alle rimanenti facce.

Chiamando ciascun lato e ciascuna faccia "elemento di contorno" rispettivamente del rettangolo e del parallelepipedo rettangolo, le due proposizioni precedenti si possono esprimere in una formula valida per entrambe le figure. Precisamente:

Ciascun elemento di contorno è parallelo ad un altro soltanto e perpendicolare ai rimanenti elementi di contorno.

Abbiamo cosí enunciato particolari relazioni comuni ai due insiemi di enti dianzi confrontati, ossia l'insieme dei lati del rettangolo e quello delle facce del parallelepipedo rettangolo. L'analogia fra questi due insiemi consiste appunto in tali relazioni comuni.

2. L'analogia pervade tanto il nostro pensiero, i nostri discorsi di ogni giorno ed i nostri consueti ragionamenti, quanto le manifestazioni dell'arte e le massime conquiste della scienza. La si usa a livelli molto diversi; il suo impiego spesso risulta incerto, nebuloso, impreciso o non sufficientemente chiarito, ma l'analogia è in grado di soddisfare alle esigenze di un rigore matematico. Ogni tipo di analogia può avere una parte importante nella sco-

perta di una risoluzione e perciò nessun tipo di analogia dovrebbe essere trascurato.

3. Ci si deve ritenere fortunati quando, nel tentativo di risolvere un problema, si scopre un *problema analogo piú semplice.* Nel paragrafo 15, si trattava di risolvere un problema sulla diagonale di un parallelepipedo rettangolo; la risoluzione di quell'esercizio scaturí proprio dalla considerazione di un problema analogo piú semplice sulla diagonale di un rettangolo. Ora vogliamo discutere un'altra applicazione di questo genere e, precisamente, ci proponiamo di risolvere il seguente problema:

Determinare il baricentro di un tetraedro omogeneo

Non è un problema facile per chi non abbia alcuna conoscenza di calcolo integrale e non possieda molta familiarità con la fisica; ai tempi di Archimede, come a quelli di Galileo, la sua risoluzione costituí un compito arduo. Quindi, volendo risolverlo partendo dai presupposti piú semplici, è necessario cercare un problema analogo piú facile; si presenta spontaneamente il corrispondente problema piano.

Determinare il baricentro di un triangolo omogeneo

Si hanno cosí due quesiti invece di uno solo, ma può risultare piú semplice rispondere a due quesiti piuttosto che ad uno soltanto se essi rivelano particolari connessioni.

4. Trascurando per un momento il problema iniziale, consideriamo con attenzione quello analogo piú semplice relativo al triangolo. La risoluzione di quest'ultimo esige qualche conoscenza intorno ai baricentri. Il seguente principio è intuitivo e si presenta naturalmente:

Se un sistema S *è costituito da piú corpi materiali i cui baricentri giacciono tutti sopra uno stesso piano, allora a questo medesimo piano appartiene anche il baricentro del sistema* S.

Nel caso di un triangolo è sufficiente invocare questa proposizione. In primo luogo essa implica che il centro di gravità del triangolo giaccia nello stesso piano di questo. Secondariamente, per la supposta omogeneità, si può pensare il triangolo costituito da filetti (sottilissimi parallelogrammi "di altezza infinitesima") paralleli ad uno dei lati, per esempio al lato AB (v. fig. 7). Ovviamente il baricentro di ciascun filetto coincide con il suo punto medio e tutti i punti medi siffatti giacciono sul segmento avente come estremi il vertice *C*, opposto al lato *AB*, ed il punto *M*, punto medio del medesimo lato.

Segue che ogni piano passante per la medesima *CM* contiene il baricentro di ciascun filetto facente parte del triangolo; quindi si può concludere che il baricentro del triangolo appartiene a tale retta. Ma, allo stesso modo, esso deve giacere sulle altre due

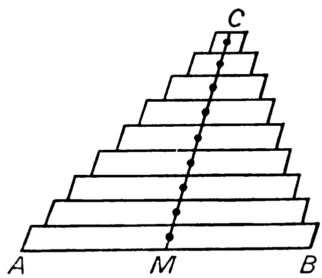


Fig. 7.

mediane del triangolo, ossia deve coincidere con il *punto di intersezione delle tre mediane.*

Ora sarebbe bene dimostrare, per via puramente geometrica e indipendentemente da qualunque ipotesi di meccanica, che le tre mediane di un triangolo passano per uno stesso punto.

5. Dopo quello del triangolo, il caso del tetraedro si presenta sotto un aspetto relativamente facile da risolvere. È stato appena condotto alla soluzione un problema analogo a quello proposto; adesso si dispone di un *modello da seguire.*

Per risolvere il problema assunto come modello, si suppone il triangolo *ABC* costituito da filetti paralleli ad uno dei suoi lati, precisamente ad *AB*. Si immagini ora il tetraedro *ABCD* formato da filetti paralleli ad uno dei suoi spigoli, per esempio ad *AB* (v. fig. 8).

I punti medi dei filetti costituenti il triangolo giacevano tutti sopra una medesima retta, una mediana del triangolo e precisamente quella passante per il vertice *C* ed il punto medio *M* di *AB*. I punti medi dei filetti costituenti il tetraedro giacciono tutti sopra uno stesso piano, e precisamente quello individuato dal punto medio *M* dello spigolo *AB* e dallo spigolo *CD* opposto a questo; il piano *MCD* può dirsi *piano mediano* del tetraedro.

Nel caso del triangolo, c'erano tre mediane come *MC* e ciascuna di esse doveva contenere il baricentro del triangolo; quindi le tre mediane in questione dovevano incontrarsi in un unico punto, che era proprio il baricentro richiesto. Nel caso del tetraedro, ci sono sei piani mediani come *MCD* e ciascuno di essi deve contenere il baricentro del tetraedro; quindi i sei piani mediani in questione devono incontrarsi in un unico punto che è proprio il baricentro richiesto.

6. Si è cosí determinato il baricentro di un tetraedro omogeneo. Per completare la risoluzione, sarebbe necessario ora dimostrare, per via puramente geometrica e indipendentemente da considerazioni di meccanica, che i sei piani mediani dianzi considerati passano tutti per un medesimo punto.

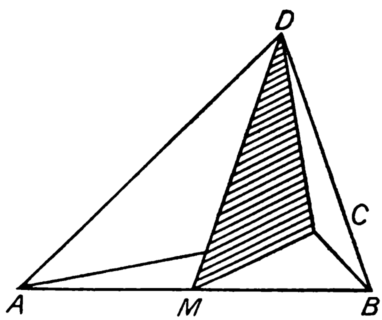


Fig. 8.

Anche l'analogo problema relativo al baricentro di un triangolo omogeneo richiedeva una dimostrazione di questo genere, al fine di completare la risoluzione: la verifica che le tre mediane di un triangolo hanno un punto, ed uno solo, in comune. Questo problema è analogo al precedente, ma notevolmente piú semplice.

Di nuovo, per risolvere quello relativo al tetraedro, si può ricorrere al problema analogo piú semplice concernente il triangolo (e che, a questo punto, si suppone già risolto). A tale scopo, si considerino i tre piani mediani per gli spigoli *DA*, *DB* e *DC*, uscenti dal vertice *D*; ciascuno di essi passa anche per il punto medio degli spigoli ordinatamente opposti a quelli dianzi considerati: cosí, per esempio, il piano mediano per *DC* contiene il punto *M* (v. fig. 8). Questi tre piani mediani intersecano il piano del triangolo *ABC* secondo le tre mediane dello stesso triangolo e, per quanto stabilito dal problema analogo piú semplice, concorrono in un medesimo punto che, come *D*, è comune a queste tre rette. Ma ogni retta congiungente due punti comuni a tre piani è pure comune ad essi.

Quindi resta cosí dimostrato che, dei sei piani medesimi, i tre uscenti dal vertice *D* hanno una retta in comune; la stessa circostanza deve verificarsi per i tre piani mediani uscenti da *A*, per i tre uscenti da *B* ed anche per i tre da *C*. Considerando simultaneamente tali condizioni, si può dimostrare che i sei piani mediani hanno un punto, ed uno solo, in comune. (Infatti i tre piani mediani passanti per i lati del triangolo *ABC* hanno in comune un punto e si intersecano a due a due secondo tre rette che concorrono in un unico punto. Perciò, in virtú di quanto precede, per ciascuna retta di intersezione deve passare un altro piano mediano.)

7. Nei precedenti punti 5 e 6, per risolvere un problema relativo ad un tetraedro omogeneo, si è fatto ricorso ad un problema analogo piú semplice concernente un triangolo omogeneo. Tuttavia i due casi differiscono per un particolare molto importante. Al punto 5 si è fatto uso del *metodo* del problema analogo piú semplice, la cui risoluzione è stata infatti ricalcata passaggio per passaggio. Invece, al punto 6, si è fatto uso del *risultato* del problema analogo piú semplice, senza curarsi del procedimento con cui esso era stato ottenuto. Talvolta è possibile *sfruttare sia il metodo sia il risultato* di un problema analogo; ciò risulta anche dall'esempio precedente, quando si riguardino le considerazioni svolte nei punti suddetti come parti distinte della risoluzione di un unico problema.

L'esempio esposto è caratteristico. Per risolvere un problema si può ricorrere alla risoluzione di un problema analogo piú semplice e, di quest'ultimo, applicare il metodo, oppure il risultato, oppure sia il metodo sia il risultato. Naturalmente, nei casi piú difficili, possono intervenire delle complicazioni che lo stesso esempio non ha rivelato. È probabile che la risoluzione del problema analogo non possa essere impiegata direttamente per quella del problema proposto; allora, considerando tale risoluzione, può essere vantaggioso variarla opportunamente, modificarla, finché se ne trovi una forma suscettibile di essere utilizzata per il problema iniziale.

8. È conveniente cercare di prevedere il risultato, o almeno alcuni aspetti di esso, con un certo grado di plausibilità; simili previsioni si fondano sull'analogia.

Cosí, si supponga di sapere che il baricentro di un triangolo omogeneo coincide con quello del sistema costituito dai tre vertici di questo (riguardati come punti materiali di egual massa). Si può allora avanzare la congettura che il baricentro di un tetraedro omogeneo coincida con quello del sistema formato dai quattro vertici di questo.

Tale previsione è una "deduzione per analogia". Si osserva che il triangolo ed il tetraedro omogenei presentano delle caratteristiche comuni e di qui si avanza la previsione che essi si assomiglino anche sotto altri aspetti. Sarebbe molto poco saggio confondere la plausibilità di siffatte congetture con la certezza della loro validità, ma sarebbe altrettanto sciocco, e forse ancora piú insensato, sottovalutarne l'importanza.

La deduzione per analogia è un tipo di ragionamento molto usato, forse quello piú importante. Essa si fonda sopra congetture che possono essere confermate oppure no dall'esperienza e da un'argomentazione piú rigorosa. Gli scienziati, sperimentando su animali per stabilire gli effetti di certi farmaci sull'uomo, traggono conclusioni per analogia. Invece un ragazzetto di mia conoscenza ecco cosa chiese quando il suo cucciolo dovette essere sottoposto a una visita del veterinario:

"Chi è un veterinario?"

"Il medico degli animali."

"E che animale è il medico degli animali?"

9. Una conclusione tratta per analogia dalla considerazione di numerosi casi è piú rigorosa di una che proceda dalla considerazione di un numero limitato di esempi. Ma la qualità è molto piú importante della quantità in questo campo. Nette analogie hanno peso maggiore di vaghe rassomiglianze, esempi sistematicamente coordinati un valore piú grande di una disordinata casistica.

Al punto 8, venne avanzata una congettura sul baricentro di un tetraedro omogeneo; essa si fondava sull'analogia di quel caso con la questione relativa ad un triangolo omogeneo e può essere ulteriormente avvalorata considerando un altro problema analogo: quello della determinazione del baricentro di una sbarra omogenea, ossia di un segmento di densità costante.

Inoltre ciò mette in risalto che l'analogia fra

segmento triangolo tetraedro

presenta molteplici aspetti. Un segmento appartiene ad una retta, un triangolo ad un piano, un tetraedro allo spazio. I segmenti di retta sono le piú semplici figure geometriche (limitate) ad una dimensione, i triangoli sono i poligoni piú semplici, i tetraedri i poliedri piú semplici.

Il segmento presenta due elementi di contorno zero-dimensionali (i due punti estremi) ed è un ente monodimensionale.

Il triangolo presenta tre elementi di contorno zero-dimensionali (i tre vertici) e tre monodimensionali (i tre lati) ed è un ente bidimensionale.

Il tetraedro presenta quattro elementi di contorno zero-dimensionali (i quattro vertici), sei monodimensionali (i sei spigoli) e quattro bidimensionali (le quattro facce) ed è una figura tridimensionale.

Queste informazioni quantitative possono essere riassunte nella seguente tabella, gli elementi delle cui colonne e righe indicano rispettivamente il numero degli elementi zero-, mono-, bi- e tridimensionali ed il numero di tali elementi per un segmento, un triangolo ed un tetraedro:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1.

È sufficiente una conoscenza superficiale del problema della determinazione dei coefficienti dei termini che figurano nelle successive potenze di un binomio per riconoscere in questa disposizione di dati un pezzo di triangolo di Pascal. Si nota pertanto una notevole regolarità per i segmenti, i triangoli, i tetraedri.

10. Quando sia stata provata un'intima connessione fra enti che si stanno confrontando, possono essere tenute in buona considerazione deduzioni per analogia del tipo di quella che ora presentiamo.

Il baricentro di una sbarra omogenea coincide con quello del sistema formato dai due estremi del medesimo oggetto. Il baricentro di un triangolo omogeneo coincide con quello del sistema formato dai tre vertici. Non si dovrebbe arguire che il baricentro di un tetraedro omogeneo coincide con quello del sistema formato dai quattro vertici?

Inoltre una sbarra omogenea è divisa dal suo baricentro in due parti che stanno nel rapporto 1:1. Ciascuna mediana di un triangolo omogeneo è divisa dal baricentro di questo in due parti che stanno fra loro nel rapporto 2:1. Non si dovrebbe arguire che il baricentro di un tetraedro omogeneo divide ogni segmento congiungente un vertice con il baricentro della faccia opposta a questo in due parti che stanno fra loro nel rapporto 3:1?

Sembra estremamente improbabile che le congetture ispirate da tali considerazioni si rivelino errate e che una regolarità cosí affascinante possa interrompersi. È proprio la sensazione che un ordine cosí semplice e armonioso non possa infrangersi a guidare il ricercatore sia in matematica sia in altre scienze; tutto ciò è bene espresso dal motto latino *Simplex sigillum veri* (la semplicità è il marchio della verità).

[Le considerazioni precedenti suggeriscono un'estensione al caso di n dimensioni. Appare poco probabile che ciò che vale per $n = 1, 2, 3$ perda validità per maggiori valori di n. Questa previsione costituisce una "deduzione per analogia" e mostra chiaramente che l'analogia è un naturale fondamento dell'induzione; v. *Induzione e induzione matematica.*]

11. Prima di chiudere questo paragrafo, vogliamo passare rapidamente in rassegna i casi piú importanti in cui l'analogia raggiunge la precisione ed il rigore dei concetti di matematica.

I) Due insiemi, S ed S', di enti matematici sono tali che determinate relazioni fra gli elementi di S sono definite dalle medesime leggi che caratterizzano determinate relazioni fra gli elementi di S'.

Un'analogia del tipo di quella fra S ed S' è illustrata dalle considerazioni svolte al punto 1; tale identificazione risulta immediatamente, pur di interpretare S ed S' rispettivamente come l'insieme dei lati di un rettangolo e l'insieme delle facce di un parallelepipedo rettangolo.

II) Fra gli elementi di S e quelli di S' intercede una corrispondenza biunivoca che conserva certe relazioni. Ossia: se fra gli elementi di uno degli insiemi sussiste una delle suddette relazioni, la medesima relazione sussiste fra gli elementi corrispondenti dell'altro insieme. Un legame di questo genere fra due insiemi costituisce un particolare tipo di analogia che dicesi isomorfismo, od anche isomorfismo oloedrico.

III) Fra gli elementi di S e quelli di S' intercede una corrispondenza plurivoca che conserva certe relazioni. Una corrispondenza siffatta si rivela particolarmente importante in numerosi rami della matematica superiore moderna e soprattutto nella teoria dei gruppi; essa dicesi omomorfismo, od anche isomorfismo meroedrico. Anche l'omomorfismo può essere riguardato come un particolare tipo di analogia.

Elementi ausiliari. — Alla fine di ogni risoluzione, si riconosce di possedere una visione del problema piú vasta di quella che si aveva all'inizio (v. *Progressi e compimento,* 1). A mano a mano che il lavoro procede, nuovi elementi vanno ad aggiungersi a quelli presi in considerazione inizialmente. Ogni elemento introdotto nella speranza che esso agevoli la risoluzione del problema proposto si dice *elemento ausiliario.*

1. Esistono vari tipi di elementi ausiliari. La risoluzione di un problema geometrico può esigere l'introduzione di nuove rette, *rette ausiliarie*; quella di un problema algebrico può richiedere la considerazione di un'incognita ausiliaria (v. *Problemi ausiliari,* 1). *Teorema ausiliario* dicesi poi ogni teorema di cui si procede alla dimostrazione nella speranza di dedurne la risoluzione di un problema assegnato.

2. Esistono vari motivi che inducono all'introduzione di elementi ausiliari. Si è felici di riuscire a ricordare un *problema connesso con quello proposto e risolto precedentemente*; tuttavia, anche se è probabile che si possa fare uso di un problema siffatto, non sempre si comprende subito quale impiego se ne farà. Per esempio, si abbia da risolvere un problema geometrico e si riesca a ricordare un problema, connesso con questo e risolto precedentemente, relativo ai triangoli. Nell'attuale figura non si ravvisa però alcun triangolo; allora, per rendere possibile il ricorso al problema già noto, è necessario ottenere un triangolo e quindi disegnarne uno conducendo delle rette ausiliarie. In generale, quando si debba risolvere un problema e si desideri applicare un problema connesso con questo e risolto precedentemente, è bene chiedersi spesso: *Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?* (L'esempio del paragrafo 10 è caratteristico.)

Si ricorra alle definizioni, per avere un'altra opportunità di introdurre elementi ausiliari. Dando, per esempio, la definizione di circonferenza, si nominano il centro ed il raggio: tali elementi dovrebbero risultare nella corrispondente figura. Non ci si può illudere di avere fatto un buon uso della definizione se essi non compaiono nel disegno; limitarsi a enunciare una definizione, senza disegnare qualcosa, non è neppure onesto.

Il tentativo di sfruttare risultati noti ed il ricorso alle definizioni sono le cause piú profonde dell'introduzione di elementi ausiliari, ma non sono le sole. Durante la risoluzione di un problema, si possono introdurre elementi ausiliari per renderlo piú significativo, piú suggestivo, piú familiare, anche se, in un primo tempo, non si ha ancora un'idea precisa di come essi potranno essere impiegati. Si può soltanto intuire che è "un'idea luminosa" avviare la risoluzione considerando questi e quegli elementi in piú.

Ci può essere questo o quel particolare motivo per introdurre un elemento ausiliario, ma almeno un motivo ci dovrebbe sempre essere: non si dovrebbero mai considerare elementi ausiliari senza ragione.

3. *Esempio.* Costruzione di un triangolo del quale siano noti un angolo, l'altezza uscente dal vertice dell'angolo dato ed il perimetro.

Si introduca un conveniente sistema di notazioni. Siano α, h e p ordinatamente l'angolo, l'altezza ed il perimetro assegnati. Supposto il problema risolto, *si disegni una figura* in cui α e h siano scelti a piacere. *Si è fatto uso di tutti i dati?* Ovviamente no; infatti non si è tenuto conto della lunghezza p eguale al perimetro del triangolo. Quindi è necessario introdurre p; ma come?

Si può procedere in diversi modi. Innanzitutto, le figure 9 e 10 appaiono poco eleganti e, se ci si chiede il perché esse ci lascino

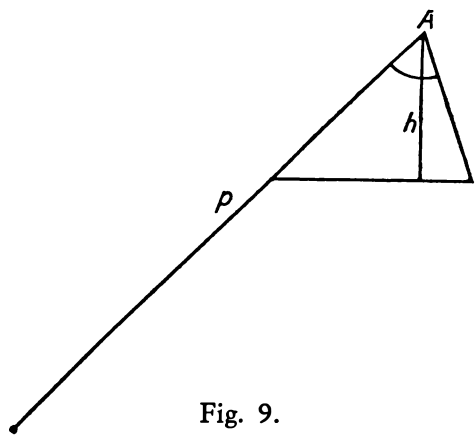


Fig. 9.

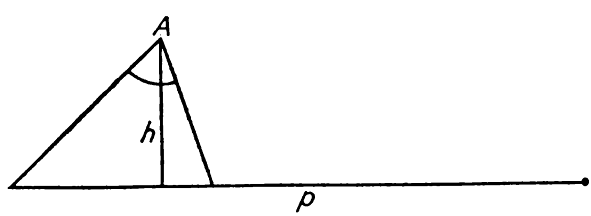


Fig. 10.

insoddisfatti, si comprende che questo effetto è causato dalla mancanza di simmetria.

Infatti il triangolo ha tre lati che non sono dati: a, b e c. Essendo a il lato opposto al vertice A, è

$$a + b + c = p.$$

Ora, b e c giocano uno stesso ruolo, possono essere scambiati fra loro; ossia, il problema in istudio è simmetrico rispetto a b e a c. Ma questa circostanza non risulta dalle suddette figure; in esse il segmento p è stato disposto senza tenere conto della naturale simmetria del problema rispetto ai due lati precedenti. Il medesimo segmento dovrà pertanto essere spostato in modo che tale condizione sia rispettata.

Questa osservazione suggerisce di disegnare p come nella figura 11. Se ora ABC fosse il triangolo richiesto, prolungando il lato

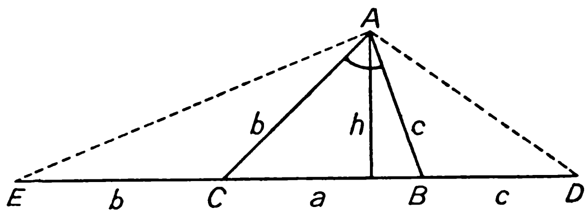


Fig. 11.

CB, a sinistra, del segmento CE eguale a b e, a destra, del segmento BD eguale a c, si otterrebbe il segmento ED eguale a

$$b + a + c = p.$$

Avendo anche soltanto un'esperienza limitata di risoluzioni di problemi, si osserva l'opportunità di costruire, insieme ad ED, i segmenti ausiliari AD e AE, ciascuno dei quali è base di un triangolo isoscele. Infatti appare logico introdurre enti come i triangoli isosceli particolarmente semplici e familiari a tutti.

L'introduzione delle precedenti porzioni di rette ausiliarie è un'ottima idea. Dall'esame della nuova figura risulta che gli angoli EAD ed α sono legati da una semplice relazione: considerando i due triangoli isosceli ABD ed ACE, si nota infatti che l'angolo

$$DAE = \frac{\alpha}{2} + 90°.$$

Di qui segue immediatamente la costruzione del triangolo DAE; in questo modo, si considera un problema ausiliario molto piú facile di quello proposto.

4. Gli insegnanti e gli autori di testi scolastici non dovrebbero mai dimenticare che lo studente perspicace ed *Il lettore intelligente* non si limitano a verificare che i passaggi di un ragionamento siano

esatti, ma desiderano soprattutto conoscere la giustificazione e lo scopo di ciascuno di essi. L'introduzione di un elemento ausiliario è un passaggio di notevole importanza. Se nella figura compare improvvisamente e senza alcuna giustificazione una retta tratteggiata, dalla cui considerazione scaturisce come per incanto la risoluzione del problema, gli studenti e i lettori intelligenti non nascondono un certo disappunto: essi si sentono quasi ingannati. Infatti la matematica è interessante proprio perché implica ragionamento e capacità creativa; ma non si impara né a ragionare né a inventare, se il motivo e lo scopo dei passaggi essenziali restano oscuri. Ci vogliono tempo e fatica per chiarire tali passaggi mediante opportune osservazioni (come è stato fatto al punto 3) oppure mediante domande e suggerimenti scelti con cura (come nei paragrafi 10, 18, 19 e 20); ma ne vale la pena.

Problemi ausiliari. — Ogni problema che sia preso in considerazione non tanto per se stesso quanto nella speranza che esso possa risultare utile nella risoluzione di un altro problema, in particolare di un problema assegnato, dicesi *problema ausiliario.* La risoluzione di un problema proposto è il fine a cui si tende, quella del problema ausiliario un mezzo per conseguire tale fine.

Sovente un insetto tenta di evadere attraverso il vetro di una finestra e si accanisce sempre piú, senza accorgersi che un'altra finestra, lí presso, proprio quella dalla quale è entrato poco prima, è spalancata. Un uomo può, o almeno dovrebbe, comportarsi in modo piú intelligente. La superiorità dell'uomo si manifesta nel raggirare un ostacolo che non può essere direttamente superato, nell'escogitare un conveniente problema ausiliario quando non si sa risolvere quello iniziale. Individuare un problema ausiliario è un'operazione fondamentale della mente; procurarsi un problema nuovo da utilizzare proprio per la risoluzione di un altro quesito e concepirlo chiaramente come un fine, che è mezzo di uno scopo ben determinato, sono eleganti conquiste dell'intelligenza. Imparare (oppure insegnare) a destreggiarsi con i problemi ausiliari in maniera intelligente è un compito estremamente delicato e importante.

1. *Esempio.* Risolvere l'equazione:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Osservando che $x^4 = (x^2)^2$, risulta evidente l'utilità di porre

$$y = x^2.$$

Si ottiene cosí un problema nuovo: Risolvere l'equazione

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Si tratta di un problema ausiliario che va inteso come un mezzo per risolvere quello proposto inizialmente. L'incognita del problema ausiliario dicesi propriamente *incognita ausiliaria.*

2. *Esempio.* Calcolare la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo di cui sono note le tre dimensioni.

Tentando di risolvere questo esercizio, nel paragrafo 8 e nel 15, pervenimmo per analogia a quest'altro problema: Calcolare la misura della diagonale di un rettangolo di cui sono note le dimensioni.

Si tratta di un problema ausiliario che viene preso in considerazione, anche in questo caso, nella speranza di ricavarne qualche vantaggio per la risoluzione di quello di partenza.

3. *Vantaggi.* Dalla considerazione di un problema ausiliario si possono conseguire vantaggi di vari tipi. Del problema ausiliario può essere utilizzato il *risultato*; cosí, nell'esempio 1, avendo ricavato dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado in y che tale incognita ausiliaria può valere 4 oppure 9, si deduce che x^2 è eguale a 4 oppure a 9 e di qui si ottengono tutti i possibili valori di x che soddisfano all'equazione di partenza. In altri casi, del problema ausiliario si può sfruttare il *metodo*; cosí, nell'esempio 2, il problema ausiliario invocato è un problema di geometria piana piú semplice di quello proposto che è di geometria solida. È logico ricorrere ad un siffatto problema ausiliario, sperando che esso offra la possibilità di rendere noti determinati procedimenti, operazioni od accorgimenti applicabili anche al problema iniziale. Nel secondo esempio, la scelta di quel particolare problema ausiliario si rivela davvero felice; un accurato esame di esso mostra che se ne può sfruttare sia il metodo sia il risultato (v. par. 15 e il par.: *Si è fatto uso di tutti i dati?*).

4. *Rischi.* Il tempo e la fatica assorbiti dalla risoluzione del problema ausiliario sono sottratti da quelli destinati alla risoluzione del problema iniziale; ovviamente, se la considerazione del problema ausiliario si rivela inutile, quel tempo e quella fatica vanno sprecati. Sarebbe quindi necessario esercitarsi nella scelta di problemi ausiliari convenienti. Un problema ausiliario può sembrare piú semplice di quello iniziale, oppure piú significativo od anche esercitare un certo fascino a causa di una maggiore eleganza. Talvolta l'unico vantaggio offerto dal problema ausiliario consiste nel

fatto che questo è un esercizio diverso che può quindi offrire inaspettate possibilità; si ricorre ad esso perché si è stanchi di restare sul problema assegnato, per il quale ogni tentativo di risoluzione diretta sembra vano.

5. *Come scoprire un problema ausiliario.* Spesso la risoluzione di un problema assegnato dipende dalla scoperta di un problema ausiliario conveniente. Purtroppo non esiste alcun metodo infallibile per trovare il problema ausiliario piú utile, cosí come non esiste alcun metodo infallibile per trovare la risoluzione. Ma ci sono alcune domande e alcuni suggerimenti, quali *Si rifletta sull'incognita!*, che frequentemente si rivelano efficaci. Anche la *Variazione del problema* spesso conduce ad utili problemi ausiliari.

6. *Problemi equivalenti.* Due problemi si dicono equivalenti se la soluzione dell'uno è soluzione dell'altro e viceversa; cosí sono equivalenti il problema iniziale e quello ausiliario considerati nell'esempio 1.

Si considerino i seguenti teoremi:

A. In qualunque triangolo equilatero, ciascun angolo misura 60°.

B. In qualunque triangolo equiangolo, ciascun angolo misura 60°.

Queste due proposizioni non sono identiche. Si riferiscono a concetti diversi: l'una riguarda l'eguaglianza dei lati e l'altra quella degli angoli di un triangolo; tuttavia ciascuna di esse segue dall'altra. Quindi il problema di dimostrare A è equivalente al problema di dimostrare B.

Dovendo dimostrare A, risulta vantaggioso invocare, come problema ausiliario, il problema di dimostrare B. Infatti la dimostrazione di B è un poco piú facile di quella di A e, ciò che piú interessa, si può *prevedere* che B è meno difficile di A, si può pensare cosí e trovarne una giustificazione logica. Infatti il teorema B, che riguarda soltanto angoli, è piú "omogeneo" del teorema A, che riguarda sia angoli sia lati.

Il passaggio dal problema primitivo a quello ausiliario dicesi *riduzione reversibile*, o *bilaterale*, od anche *equivalente*, se i due problemi considerati sono equivalenti fra loro. Cosí sono riduzioni reversibili la precedente da A a B e quella eseguita nell'esempio 1. Le riduzioni reversibili sono, sotto un certo aspetto, il modo piú importante e vantaggioso di ridurre la risoluzione di un problema a quella di un problema ausiliario; tuttavia, come mette in luce l'esempio 2, possono rivelarsi molto utili anche problemi ausiliari che non siano affatto equivalenti a quello di partenza.

7. *Catene di problemi ausiliari equivalenti.* Catene siffatte non sono rare nei ragionamenti di matematica. Si debba risolvere un problema A, del quale non si veda una risoluzione, ma si possa stabilire l'equivalenza con un altro problema B. La considerazione di B può condurre ad un terzo problema C equivalente a B. Allo stesso modo la risoluzione di C può essere ricondotta a quella di un quarto problema D e cosí via fino ad ottenere un ultimo problema, che diremo L, la cui risoluzione è nota oppure immediata. Poiché ciascun problema ausiliario è equivalente a quello che lo precede, L risulta necessariamente equivalente ad A. Quindi è lecito dedurre la soluzione di A da quella di L, ultimo anello di una catena di problemi ausiliari.

Catene di problemi siffatte furono considerate anche dagli antichi matematici greci, come appare da un famoso passo di *Pappo*. Per chiarire quanto precede, riprendiamo l'esempio 1 indicando con (A) la condizione alla quale deve soddisfare l'incognita x; ossia:

$$\text{(A)} \qquad x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Un modo di risolvere l'esercizio è trasformare l'equazione proposta in un'altra, che diremo (B):

$$\text{(B)} \qquad (2x^2)^2 - 2(2x^2)\,13 + 144 = 0.$$

Le equazioni (A) e (B) sono diverse; si può notare che esse differiscono solo formalmente e si può subito riconoscere che sono equivalenti, ma non identiche. La conversione della (A) nella (B) non solo è corretta, ma ha uno scopo ben preciso e chiaro per chiunque abbia una certa pratica di risoluzione di equazioni di secondo grado. Procedendo con il medesimo intendimento, la (B) può essere trasformata nella seguente equazione (C):

$$\text{(C)} \qquad (2x^2)^2 - 2(2x^2)\,13 + 169 = 25,$$

e da questa, successivamente, si ottiene:

$$\text{(D)} \qquad (2x^2 - 13)^2 = 25,$$

$$\text{(E)} \qquad 2x^2 - 13 = \pm 5,$$

$$\text{(F)} \qquad x^2 = \frac{13 \pm 5}{2},$$

$$\text{(G)} \qquad x = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}},$$

$$\text{(H)} \qquad x = 3, \text{ oppure } -3, \text{ oppure } 2, \text{ oppure } -2.$$

Ciascuna delle riduzioni precedenti è reversibile, quindi l'ultima condizione (H) è equivalente a quella di partenza (A) e si può affermare che tutte le possibili soluzioni dell'equazione iniziale sono appunto 3, -3, 2, -2.

Dall'equazione (A) assegnata è stata pertanto dedotta una successione di equazioni, (B), (C), . . ., (H), ciascuna delle quali è equivalente a quella che la precede. Il punto delicato del procedimento sta proprio qui. Equazioni equivalenti sono soddisfatte dagli stessi valori dell'incognita, cosí come condizioni equivalenti sono soddisfatte dai medesimi enti. Quindi, passando da una data condizione a un'altra equivalente a questa, si ottengono le stesse soluzioni. Invece, passando da una data condizione ad un'altra piú restrittiva, si possono perdere delle soluzioni; mentre, passando ad una piú lata, se ne possono introdurre delle spurie che non soddisfano affatto il problema iniziale. Segue che può avvenire di perdere ogni contatto con il problema assegnato se, ricorrendo a una successione di riduzioni, si passa da una condizione ad un'altra piú restrittiva e poi, di nuovo, ad una piú lata. Per evitare questo pericolo, è necessario analizzare con molta attenzione la natura di ogni condizione che si introduce e chiedersi sempre se essa è equivalente a quella iniziale. Procedere con tanta cautela è indispensabile quando, invece che con una sola equazione, si abbia a che fare con un sistema di equazioni oppure, come accade nei problemi di costruzioni geometriche, con condizioni non espresse sotto forma di equazioni.

(Si veda anche *Pappo*, specialmente i punti 2, 3, 4 e 8. Il passo, riportato a p. 146, righe 5-23, è necessariamente riassunto; ma esso illustra proprio una catena di "problemi di determinazione", ciascuno dei quali ammette una diversa incognita. L'esempio dianzi considerato riguarda, invece, il caso opposto: tutti i problemi della catena presentano la stessa incognita e differiscono soltanto per la forma della condizione. Naturalmente non è necessaria alcuna limitazione siffatta.)

8. *Riduzione unilaterale.* Si abbiano due problemi, A e B, entrambi insoluti e tali che dalla risoluzione del primo di essi seguirebbe la risoluzione completa dell'altro, ma non viceversa; dalla risoluzione di B, si potrebbe ricavare qualche informazione su A, ma non si saprebbe davvero dedurre la risoluzione completa di A da quella di B. Quindi dalla risoluzione di A si ottiene un vantaggio maggiore che da quella di B. Diremo allora che A e B sono rispettivamente il *piú ambizioso* e il *meno ambizioso* dei due problemi.

La conversione di un problema assegnato a uno ausiliario piú ambizioso, oppure meno ambizioso, dicesi *riduzione unilaterale.* Ci sono due tipi di riduzione unilaterale ed entrambi si rivelano, in un modo o in un altro, piú rischiosi di una riduzione bilaterale o reversibile.

L'esempio 2 presenta una riduzione unilaterale ad un problema meno ambizioso. Infatti, se fosse nota la risoluzione del problema proposto relativo ad un parallelepipedo rettangolo nel quale la lunghezza, la larghezza e l'altezza hanno rispettivamente misure a, b e c, basterebbe porre $c = 0$ per ricadere nel problema ausiliario relativo ad un rettangolo i cui lati hanno per misure a e b. Per un altro esempio di riduzione ad un problema meno ambizioso, si veda *Particolarizzazione*, 3, 4, 5. Questi esempi mostrano chiaramente che, con un pizzico di fortuna, si può usare come *trampolino* un problema meno ambizioso di quello assegnato, pur di combinarne la soluzione con qualche altra osservazione opportuna.

Anche la riduzione unilaterale ad un problema piú ambizioso può risultare efficace (v. *Generalizzazione*, 2 e la riduzione del primo problema al secondo considerata in *Induzione e induzione matematica*, 1, 2). Infatti il problema piú ambizioso può rivelarsi anche il piú accessibile; si tratta del cosiddetto *Paradosso dell'inventore.*

Bernard Bolzano (1781-1848). — Logico e matematico, dedicò all'euristica un'ampia parte della sua poderosa opera di logica intitolata *Wissenschaftslehre* (vol. 3, pp. 293-575). Di questa parte del suo lavoro, egli scrisse: "Io non m'illudo affatto di presentare qui qualche processo di ricerca che non sia stato intuito da molto tempo da tutti gli uomini di ingegno; né prometto di offrire al lettore qualcosa di completamente nuovo in questo campo. Mi assumerò piuttosto l'impegno di spiegare chiaramente le regole e le forme di indagine seguite da tutti i pensatori piú abili, ma spesso inconsapevolmente. Sebbene io sia scevro dall'illusione di riuscire a realizzare per intero persino questo umile piano, spero tuttavia che quel poco che esporrò incontri il favore di qualcuno e venga finalmente applicato."

Idea luminosa. — Idea feconda, idea felice, brillante intuizione, lampo di genio, sono locuzioni di uso corrente che stanno a significare un subitaneo passo innanzi verso la soluzione di un problema (v. *Progressi e compimento*). Il presentarsi di un'idea luminosa è un'esperienza che si presenta spesso anche nella vita pratica, ma che è difficile da descrivere quindi può essere interessante notare che ne esiste una descrizione molto suggestiva, implicitamente contenuta in un passo piuttosto famoso di Aristotele.

Quasi tutti si troveranno d'accordo nell'ammettere che la formulazione di un'idea luminosa sia un "atto di perspicacia". Ebbene Aristotele definisce la "perspicacia" in questo modo: "La perspicacia è la facoltà di stabilire per intuito, in un tempo cosí breve da non poter essere valutato, una connessione essenziale. Come, per esempio, quando si vede qualcuno discorrere con una persona ricca in un certo atteggiamento ed immediatamente si è certi che quello stia chiedendo denaro in prestito. Oppure come quando si nota che la faccia piú lucente della Luna è sempre rivolta verso il Sole e, all'improvviso, si comprende perché avviene cosí: è il Sole che illumina la Luna."[2]

Il primo esempio non è malvagio, ma piuttosto banale; non ci vuole molta perspicacia ad avanzare una simile congettura e non si tratta certo di un'idea molto luminosa. Invece il secondo paragone si rivela veramente efficace, se, con un minimo di immaginazione, lo poniamo in una cornice opportuna.

Intanto è bene ricordare che ai tempi di Aristotele era necessario interrogare il Sole e le stelle per ottenere informazioni sul volgere del tempo, perché non esistevano orologi, ed osservare le fasi della Luna prima di compiere un viaggio di notte, perché non c'erano lampioni per le strade. Un qualunque contemporaneo del sommo filosofo conosceva il cielo molto meglio dei moderni abitanti delle città e la sua intelligenza vergine non era stata ancora contaminata da opprimenti reminiscenze di letture di articoli di divulgazione di teorie astronomiche. Egli vedeva la Luna piena come un disco piatto, simile al disco del Sole, ma molto meno luminoso, e certo rimaneva attonito dinanzi ai continui mutamenti di forma e di posizione di quel corpo celeste. Cosí, osservando necessariamente la Luna ogni giorno e piú volte in un giorno, dall'alba al tramonto, dovette notare che "la faccia piú lucente della Luna è sempre rivolta verso il Sole"; questa osservazione era già un notevole risultato. Ed ora egli intuisce che i vari aspetti della Luna sono simili a quelli di una palla illuminata da una banda soltanto, in modo che metà della sua superficie sia rischiarata e l'altra metà resti al buio; cosí giunge a concepire il Sole e la Luna non piú come

[2] Il brano riportato è stato leggermente modificato. Per una traduzione piú letterale, v. WILLIAM WHEWELL, *The Philosophy of the Inductive Sciences* (1847), vol. II, p. 131.

dischi appiattiti ma come corpi rotondi, il primo dei quali dà luce che l'altro riceve. Egli comprende l'intimo significato di tutto ciò, istantaneamente collega tutte le sue primitive concezioni: ecco il subitaneo scatto dell'immaginazione, l'idea luminosa, il lampo di genio.

Si può verificare il risultato? Si può verificare il procedimento? — Una risposta precisa a queste domande rafforza la fiducia nella risoluzione e contribuisce a procurare saldi fondamenti alle nostre cognizioni.

1. Si può provare la validità dei risultati numerici dei problemi di matematica confrontandoli con dati sperimentali, oppure con valori che il buon senso induce a ritenere conformi all'esperienza. Poiché i problemi scaturiscono da esigenze pratiche o da una innata curiosità, è probabile che spesso questo confronto con grandezze concrete venga invece omesso. Ma ogni insegnante sa che gli studenti accettano con disinvoltura i risultati piú sbalorditivi. Alcuni ragazzi non si impressionano affatto se ottengono come soluzione che una barca è lunga 4 km e che l'età del capitano, che si sa fra l'altro avere dei nipoti, è di 8 anni e 2 mesi. Tale indifferenza, però, non è necessariamente indice di stupidità; essa rivela piuttosto che i problemi inventati non interessano gli alunni.

2. I "problemi letterali" sono suscettibili di verifiche piú numerose e molto piú interessanti che i "problemi numerici" (v. par. 14). Come esempio, si consideri il tronco di una piramide a base quadrata. Se a, b e h sono rispettivamente le lunghezze del lato della base maggiore, del lato della base minore e dell'altezza del tronco, il volume V di questo è espresso dalla formula:

$$V = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} h.$$

Tale risultato può essere verificato mediante la *Particolarizzazione*. Infatti, se $a = b$, il tronco precedente degenera in un prisma e la formula ora scritta diventa: $V = a^2h$; se $b = 0$, lo stesso tronco degenera in una piramide e si trova: $V = \frac{a^2h}{3}$. Si può anche eseguire una *Verifica dimensionale.* Infatti l'espressione che sta a secondo membro della formula dianzi considerata ha le dimensioni di una lunghezza al cubo, proprio come deve essere nel caso di un volume. Si può anche provare la validità del risultato ottenuto tramite una *Variazione dei dati.* Infatti, se una delle quantità positive a, b od h aumenta, aumenta anche il valore dell'espressione che dà il volume.

Verifiche di questo tipo possono essere eseguite non solo sul risultato finale, ma anche sui risultati parziali che si ottengono nel corso della risoluzione; esse rivelano una cosí grande utilità che vale la pena di eseguire molti esercizi a tale proposito (v. *Variazione del problema*, 4). Per poter ricorrere a verifiche siffatte, può essere utile generalizzare un "problema numerico" in un "problema letterale" (v. *Generalizzazione*, 3).

3. *Si può verificare il procedimento?* Verificare il procedimento passaggio per passaggio sarebbe una mera ripetizione. In primo luogo una ripetizione banale si presta molto bene a risultare noiosa e per di piú controproducente, perché fiacca l'attenzione; secondariamente, dove si è caduti una volta, in identiche circostanze è facile ricadere. Quando si comprenda che è necessario riprendere l'intero procedimento passaggio per passaggio, bisognerebbe mutare almeno l'ordine delle operazioni, oppure il loro raggruppamento, in modo di introdurre qualche variazione.

4. Richiede meno sforzo e presenta maggiore interesse prendere in particolare considerazione quello che sembra il punto debole di un procedimento. Una domanda efficace per mettere a fuoco quei lati di un procedimento che sarebbe bene analizzare a fondo è: *Si è fatto uso di tutti i dati?*

5. Ovviamente le nostre conoscenze extramatematiche non possono fondarsi esclusivamente su prove formali. Il nucleo essenziale delle nostre cognizioni relative alla vita di ogni giorno è continuamente soggetto a verifiche e rafforzato da parte della nostra stessa esperienza. Nell'ambito delle scienze naturali, si eseguono sistematicamente delle prove sperimentali che hanno l'aspetto di accurati esperimenti e di precise misurazioni e sono abbinati a calcoli matematici nel campo della fisica. È lecito in matematica accontentarsi di verifiche puramente formali?

Questa è una questione filosofica sulla quale non intendiamo aprire una discussione in questa sede. È certo che le conoscenze matematiche del lettore, quelle dell'autore e quelle degli studenti non sono fondate soltanto su prove formali. Se esiste qualche conoscenza concreta, essa ha una solida base sperimentale che viene cementata da ciascun problema il cui risultato sia stato dimostrato esatto.

Si può ottenere il risultato in altro modo? — Quando la risoluzione finalmente conseguita si presenti lunga e tortuosa, è spontaneo sospettare dell'esistenza di qualche risoluzione piú chiara e meno involuta. *Si può ottenere il risultato in altro modo? Lo si può vedere a colpo d'occhio*? Persino quando si sia riusciti a trovare una risoluzione soddisfacente, può essere interessante cercarne un'altra. Spesso ci si vuole convincere della validità di un risultato teorico ottenendolo con diversi procedimenti, cosí come si desidera sentire un oggetto materiale con due sensi distinti: dopo una prova, si avverte la necessità di un'altra, allo stesso modo in cui si vuole toccare un oggetto dopo averlo visto.

Due verifiche contano piú di una sola. "È prudente gettare sempre due ancore."

1. *Esempio.* Calcolare l'area S della superficie laterale del tronco di un cono circolare retto, di cui si conoscano il raggio R della base maggiore, il raggio r della base minore e l'altezza h.

Questo problema ammette diverse risoluzioni. Per esempio, si supponga di conoscere la formula che dà l'area della superficie laterale di un cono. Il tronco di cono si ottiene tagliando da un cono dato un altro cono piú piccolo; quindi, poiché la superficie laterale del tronco risulta la differenza delle superficie laterali di questi due coni ora considerati, per risolvere il problema proposto basterà esprimere tale differenza in funzione di R, r e h. Sviluppando questa idea, si perviene infine alla formula:

$$S = \pi(R + r)\sqrt{(R-r)^2 + h^2}.$$

Essendo giunti, in un modo o in un altro, a questo risultato, e ciò dopo calcoli piuttosto laboriosi, si può desiderare di scoprire un procedimento piú chiaro e meno tortuoso. *Si può ottenere il risultato in altro modo? Lo si può vedere a colpo d'occhio?*

Volendo vedere intuitivamente il risultato finale, si può cominciare a tentare di mettere in luce il significato geometrico dei fattori che entrano nella formula scritta qui sopra. Cosí si può osservare che

$$\sqrt{(R-r)^2 + h^2}$$

è la lunghezza dell'*apotema* del tronco di cono, ossia di uno dei lati del trapezio isoscele che, ruotando intorno alla retta congiungente i punti medi delle sue basi, genera il tronco di cono in questione (v. fig. 12). Inoltre si nota che

$$\pi(R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

è la media aritmetica delle lunghezze delle circonferenze delle basi dello stesso tronco di cono; in particolare, questa osservazione induce a scrivere la medesima espressione nella forma

$$\pi (R + r) = 2\pi \frac{R + r}{2},$$

dalla quale risulta manifestamente che $\pi (R + r)$ è la *lunghezza della circonferenza della sezione mediana del tronco*, ossia della sezione del tronco ottenuta intersecando il solido con un piano parallelo alle basi ed equidistante da esse.

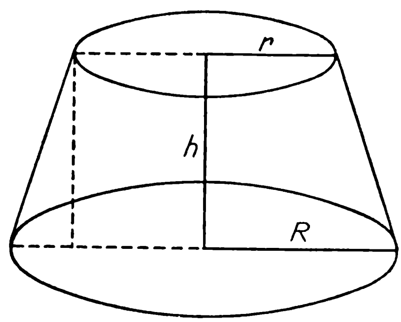


Fig. 12.

In virtú delle precedenti nuove interpretazioni, il risultato definitivo appare ora sotto una luce diversa; precisamente esso può scriversi:

Area della superficie laterale del tronco = lunghezza della circonferenza della sezione mediana × lunghezza dell'apotema.

D'altra parte, per un trapezio si ha:

Area della superficie del trapezio = lunghezza della base mediana × altezza.

(Si ricordi che la base mediana di un trapezio è il segmento parallelo alle basi ed equidistante da esse.) Si intuisce allora l'analogia che intercede fra la proposizione relativa al tronco di cono e quella relativa al trapezio e ciò consente di vedere "a colpo d'occhio" il risultato del problema proposto. Ossia, si comprende di essere ora molto vicini ad una prova stringente e diretta della soluzione ottenuta dopo calcoli tanto laboriosi.

2. L'esempio precedente è caratteristico. Non completamente soddisfatti dal modo con cui è stato ottenuto il risultato, si potrebbe tentare di riprenderlo, di modificarlo. Perciò si studia la soluzione trovata sforzandosi di comprenderla meglio, di scoprirne qualche aspetto nuovo. Dapprima si può avanzare un'interpretazione suggestiva di qualche fattore od addendo che figura nel risultato; poi può avvenire che si sia tanto fortunati da trovare un modo originale di esprimere qualche altro fattore od addendo.

Esaminando una dopo l'altra le varie parti che costituiscono la formula finale e interpretandole in tutte le maniere possibili, si può giungere finalmente a scorgere un aspetto recondito del risultato e da tale nuova interpretazione può scaturire un'idea originale per esprimere in forma piú precisa le considerazioni svolte e persino per sviluppare un'ulteriore verifica.

Naturalmente questa eventualità si presenta con maggiore probabilità ad un esperto matematico alle prese con un problema complesso che ad un novellino afflitto da qualche problema elementare. È vero che un matematico che possieda molte cognizioni è, in un certo senso, molto piú esposto di un profano al pericolo di far uso di troppo sapere anche quando abbia sotto mano un esercizio non necessariamente complicato; ma, in compenso, un esperto matematico si trova in una posizione piú vantaggiosa rispetto a un principiante: egli trova facilmente interpretazioni originali per le varie parti del risultato, anche per quelle all'apparenza piú trascurabili, e sa trarre tesoro da ogni minima informazione atta a condurre, per diverse vie, alla completa soluzione.

Tuttavia può accadere persino nelle prime classi che gli alunni presentino delle risoluzioni appesantite e rese complicate senza motivo. Allora l'insegnante dovrebbe, almeno una volta o due, mostrare loro come si sarebbe potuto risolvere il problema piú rapidamente e anche come si sarebbe potuto scorgere, proprio nello stesso risultato, l'indicazione di un procedimento piú rapido ed elegante.

Si veda anche *Riduzione all'assurdo e dimostrazione indiretta.*

Si può sfruttare il risultato? — Risolvere un problema con i propri mezzi soltanto è fare una scoperta: una scoperta non troppo sensazionale, se il problema non è molto difficile, ma pur sempre una scoperta. Avendo scoperto qualcosa, sia pure di poca importanza, è opportuno chiedersi se il risultato non esprima alle volte un poco di piú di quanto esso riveli a prima vista; le possibilità offerte dal risultato non devono essere trascurate ed è bene tentare di usare ancora il processo impiegato. Si assecondi la buona fortuna. ***Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema?***

1. È facile ideare nuovi problemi quando si abbia una certa dimestichezza con i principali mezzi di variazione quali la *Generalizzazione*, la *Particolarizzazione*, l'*Analogia*, lo *Scomporre e ricomporre*. Ricorrendo a queste operazioni, da un problema assegnato possono essere dedotti altri problemi e da ciascuno di essi, nel medesimo modo, altri ancora e cosí via. Teoricamente tale processo non ammette fine; ma, nella pratica, solo raramente esso può essere protratto molto a lungo; infatti i problemi cosí ottenibili tendono a divenire estremamente difficoltosi.

D'altra parte, problemi nuovi e semplici da risolvere possono essere costruiti anche mediante la soluzione di un problema noto; questi facili problemi, però, risultano poco interessanti.

Non è facile trovare problemi nuovi che siano ad un medesimo tempo interessanti e accessibili; a tale scopo si richiedono esperienza, intuizione e fortuna. Ma è utile non rinunciare mai a priori alla ricerca di altri problemi buoni, quando si sia riusciti a risolverne uno. I buoni problemi e i funghi di certe specie hanno una caratteristica comune: crescono a gruppi. Dopo averne trovato uno, è prudente guardarsi attorno attentamente: è molto probabile che ce ne siano altri lí vicino.

2. Vogliamo ora illustrare alcuni dei concetti precedenti ricorrendo allo stesso esempio considerato nei paragrafi 8, 10, 12, 14 e 15. Riprendiamo quindi in considerazione il seguente problema:

Calcolare la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo del quale siano note le tre dimensioni.

Nota la soluzione di questo esercizio, è immediato risolvere questi altri problemi, il primo dei quali è già stato trattato nel paragrafo 14:

Calcolare la misura del raggio della sfera circoscritta ad un parallelepipedo rettangolo del quale siano date le tre dimensioni.

Il piede dell'altezza di una piramide a base rettangolare coincide con il centro del poligono di base; note le misure dell'altezza della piramide e dei lati della base, calcolare la lunghezza degli spigoli laterali del medesimo solido.

Determinare la distanza di due punti dello spazio aventi rispettivamente coordinate cartesiane ortogonali (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2).

Tutti questi problemi si risolvono facilmente, perché essi differiscono ben poco da quello iniziale la cui soluzione è nota. Ma in ciascuno di essi interviene un concetto nuovo; precisamente il concetto di sfera circoscritta, quello di piramide, quello di coordinate cartesiane ortogonali. Questi concetti possono essere aggiunti e soppressi senza difficoltà; ovviamente, liberandosi da essi, si ritorna al problema iniziale.

I tre enunciati precedenti sono di un certo interesse, poiché sono tali i concetti introdotti nell'esercizio di partenza. Persino l'ultimo, relativo alla distanza di due punti assegnati mediante le rispettive coordinate cartesiane ortogonali, è importante; e ciò proprio perché sono importanti queste coordinate.

3. Ecco un altro problema facile da risolvere, quando sia nota la soluzione del problema da cui siamo partiti:

Calcolare la misura dell'altezza di un parallelepipedo rettangolo del quale si conoscono le misure della lunghezza, della larghezza e della diagonale.

Infatti il risultato del problema iniziale consiste essenzialmente in una relazione fra quattro quantità: le misure delle tre dimensioni del parallelepipedo e quella della sua diagonale; tale relazione consente, note tre qualsiasi delle misure suddette, di determinare la quarta di esse. Quindi è possibile risolvere anche questo nuovo problema.

Abbiamo cosí messo in risalto una via per ricavare facilmente nuovi problemi da uno già noto e risolto: basta riguardarne l'incognita come uno dei dati ed assumere uno dei dati come nuova incognita. La relazione che intercede fra incognita e dati è la stessa in entrambi i problemi, quello primitivo e quello derivato, e quindi, trovata questa relazione per uno di essi, la si può applicare anche per la risoluzione dell'altro.

La deduzione di nuovi problemi mediante un siffatto scambio di ruoli è molto diversa da quella indicata al punto 2.

4. Cerchiamo ora di ottenere altri problemi con procedimenti ancora diversi.

Ecco una *generalizzazione* immediata del medesimo problema dianzi considerato:

Calcolare la misura della diagonale di un parallelepipedo non rettangolo, noti i tre spigoli uscenti da un vertice ed i tre angoli fra questi compresi.

Mediante *particolarizzazione*, si ottiene invece quest'altro problema:

Calcolare la misura della diagonale di un cubo di dato spigolo.

Inoltre, per *analogia*, si perviene ad un'inesauribile varietà di problemi. Eccone alcuni dedotti per questa via da quelli enunciati al punto 2:

Calcolare la misura della diagonale di un ottaedro regolare di dato spigolo; calcolare la misura del raggio della sfera circoscritta ad un tetraedro regolare di dato spigolo; determinare la distanza sferica di due punti situati sulla superficie della Terra (riguardata come una sfera della geometria), quando di essi siano note le rispettive coordinate cartesiane geografiche, ossia la latitudine e la longitudine.

Tutti questi problemi sono interessanti, ma solo quello ottenuto per particolarizzazione può essere risolto immediatamente in virtú della soluzione di quello iniziale.

5. Altri nuovi problemi si possono ottenere da uno prefissato, considerando in questo alcuni elementi come variabili.

Un caso particolare di un problema enunciato al punto 2 concerne la determinazione della misura del raggio di una sfera circoscritta ad un cubo di dato spigolo. Si considerino elementi fissi il cubo ed il centro comune di tale solido e della sfera, elemento variabile il raggio della sfera. Se tale raggio è abbastanza piccolo, la sfera è contenuta nel cubo; al crescere con continuità del raggio, la sfera si dilata come un pallone di gomma quando viene gonfiato. Ad un certo momento, la sfera tocca le facce del cubo; un istante piú tardi, essa toccherà gli spigoli del medesimo solido; poco dopo passerà per i vertici di questo. Quali valori assume la misura del raggio in ciascuno di questi tre momenti particolari?

6. L'esperienza matematica di uno studente non è completa fintanto che egli non abbia avuto l'occasione di risolvere un *problema inventato da lui.* L'insegnante può accennare alla deduzione eventuale di nuovi problemi da uno appena risolto ed in questo modo stuzzicare la curiosità degli alunni; anzi, egli può lasciare completare l'invenzione da loro. Per esempio, l'insegnante potrebbe descrivere l'espansione della sfera cosí come abbiamo fatto noi al punto 5 e poi domandare: "Cosa si potrebbe adesso calcolare? Quale valore della misura del raggio è particolarmente interessante?"

Sviluppo del piano. — La concezione e lo sviluppo di un piano sono due cose distinte. In un certo senso, ciò è vero anche per i problemi di matematica; fra lo sviluppo del piano di risoluzione e la sua compilazione esistono differenze intrinseche.

1. Mentre si procede alla ricerca di un assetto definitivo e rigoroso, si può ricorrere a deduzioni ipotetiche e semplicemente plausibili: per sorreggere un ponte durante la sua costruzione, si erige un'impalcatura. Ma tale impalcatura viene demolita quando l'opera è a buon punto e il ponte può reggersi da solo: analogamente,

quando la risoluzione è stata condotta abbastanza innanzi, tutte le deduzioni ipotetiche e semplicemente plausibili devono sparire ed il risultato dovrebbe seguire in virtú di un procedimento rigoroso.

Nella ricerca di un piano di risoluzione, non si deve temere di ricorrere ad un ragionamento fondato su congetture, od euristico: è corretto tutto ciò che conduce ad un'idea esatta. Ma è necessario partire diversamente per sviluppare un piano; a questo punto bisogna accettare soltanto le argomentazioni stringate e definitive. *Sviluppando il piano di risoluzione, si verifichi ogni passaggio. Si può riconoscere manifestamente che ogni passaggio è esatto?*

Quanto piú liberamente si sia ricorsi a ragionamenti euristici durante la compilazione di un piano, tanto piú nello sviluppo di questo i vari passaggi vanno verificati con cura.

2. Ci proponiamo ora di esporre qualche considerazione intorno all'ordine nel quale sviluppare i dettagli di un piano, soprattutto se si tratta di un problema complesso. Nessun particolare sia trascurato, si cerchi di comprendere bene la relazione in cui un determinato dettaglio sta con l'intero problema, non si perdano di vista le connessioni fra i passaggi essenziali. È necessario procedere con un ordine specifico.

In particolare, non è sensato verificare i dettagli se non si hanno ottimi motivi di ritenere esatti i punti cruciali del ragionamento: se in esso ci fosse una falla, sarebbe proprio inutile la verifica di questo o quel particolare inessenziale.

L'ordine poi, nel quale sviluppare i dettagli del procedimento, non è necessariamente quello secondo cui essi sono stati elaborati; ed ancora diverso può essere l'ordine nel quale questi possono risultare disposti nella stesura definitiva. Negli *Elementi* di Euclide, i particolari dei procedimenti sono presentati in un rigido assetto sistematico che venne ammirato tanto quanto criticato.

3. Nell'esposizione euclidea, tutti i procedimenti si svolgono in un medesimo senso: dai dati all'incognita nei "problemi di determinazione" e dall'ipotesi alla tesi nei "problemi di dimostrazione". L'introduzione di ogni elemento nuovo, punto, retta, ecc. deve essere giustificata dai dati o dall'esistenza di altri elementi rigorosamente introdotti in precedenti passaggi. Ogni affermazione nuova deve essere rigorosamente giustificata dall'ipotesi o da altre affermazioni rigorosamente dedotte in precedenti passaggi. Ogni elemento nuovo, ogni nuova affermazione sono esaminati appena si presentano per la prima volta e cosí sono analizzati una volta per tutte; ciò consente di focalizzare la propria attenzione unicamente sul passaggio che si sta considerando, senza bisogno né di tornare

indietro né di guardare troppo innanzi. La tesi è proprio l'ultima affermazione di cui si deve provare la validità. Se ogni passaggio, l'ultimo compreso, è esatto, allora è tale anche l'intero processo.

Quando si intenda analizzare i particolari di un ragionamento, il metodo di Euclide è davvero consigliabile, senza riserve. Nessun procedimento è migliore di un'esposizione di tipo euclideo, soprattutto nel caso di un ragionamento originale, lungo e complicato che abbia il carattere di una scoperta e debba ormai essere verificato soltanto nei dettagli, essendo già abbozzato per sommi capi.

Ma il metodo di Euclide non può essere raccomandato senza riserve quando si desideri esporre al lettore, oppure a un ascoltatore, un argomento del quale questi non abbia mai sentito parlare. L'esposizione euclidea, efficacissima per rendere ragione dei minimi particolari, non è altrettanto atta a mostrare il filo conduttore di un ragionamento. *Il lettore intelligente* riconoscerebbe facilmente l'esattezza di ogni passaggio, ma avvertirebbe anche una notevole difficoltà a comprendere la causa, lo scopo, il significato del ragionamento considerato nel suo complesso; infatti l'esposizione di Euclide spesso procede proprio in senso opposto a quello naturale del processo inventivo. (Il metodo euclideo segue rigidamente lo schema della "sintesi"; v. *Pappo*, 3, 4, 5.)

4. Riassumendo: Il metodo di esposizione di Euclide, che procede senza eccezioni dai dati all'incognita e dall'ipotesi alla tesi, si rivela perfetto per la verifica dei dettagli di un procedimento, ma risulta poco efficace nel metterne in luce le linee essenziali.

È davvero desiderabile che gli studenti esaminino i loro procedimenti seguendo il metodo euclideo, ossia partendo dai dati e giungendo all'incognita e verificando ogni passaggio, anche se nulla di tutto ciò dovrebbe essere obbligatorio. Invece non è altrettanto opportuno che l'insegnante presenti troppe dimostrazioni di carattere strettamente euclideo, benché un'esposizione siffatta possa riuscire molto utile dopo una discussione nel corso della quale, come si raccomanda caldamente in questo libro, gli studenti sotto la guida del professore, ma il piú possibile indipendentemente da essa, abbiano scoperto il concetto fondamentale della dimostrazione o della risoluzione. Efficace sembra anche il metodo adottato in alcuni testi, nei quali prima è esposto un abbozzo intuitivo dell'idea fondamentale e poi sono presentati, secondo un ordinamento euclideo, i dettagli del procedimento.

5. Il matematico scrupoloso che desideri convincersi della validità di una proposizione si sforza di interpretarla intuitivamente e di trovarne una verifica formale. *Si può riconoscerne manifesta-*

mente l'esattezza? Si può dimostrarne la validità? Egli si comporta a tale proposito come una massaia coscienziosa che vuole vedere e toccare un prodotto per accertarsi della sua buona qualità, prima di acquistarlo. L'indagine intuitiva e la verifica formale sono due modi distinti di convincersi della verità paragonabili alla percezione di un oggetto materiale fornita da due sensi diversi, quali la vista e il tatto.

L'indagine intuitiva può portare piú innanzi della prova formale. Ogni studente di vivace intelligenza, anche se sprovvisto di una sistematica conoscenza di geometria solida, può vedere che due rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro (le tre rette non sono necessariamente complanari) non appena egli abbia compreso il significato dei vocaboli. Eppure la dimostrazione di questa proposizione, cosí come è svolta nel Libro XI degli *Elementi* di Euclide, esige una profonda, accurata e specifica preparazione.

A sua volta, la manipolazione formale di regole di logica e di formule algebriche può condurre piú lontano dell'intuizione. Quasi tutti vedono subito che tre rette prese a caso sopra un piano dividono questo in sette regioni (basta fissare l'attenzione sull'unica di tali porzioni che sia limitata, ossia sul triangolo individuato dalle tre rette date). Ma pochi sono in grado di riconoscere altrettanto speditamente, sia pure concentrando intensamente la propria attenzione sull'enunciato, che cinque piani presi a caso dividono lo spazio in ventisei regioni; tuttavia ciò segue da una dimostrazione rigorosa, che però non è né lunga né difficile.

Sviluppando un piano, si verifichi dunque ogni passaggio. A tale scopo, si può ricorrere sia a un'indagine intuitiva sia a regole formali; volta a volta, si rivela piú efficace o l'intuizione o il ragionamento formale ed è sempre un esercizio interessante e utile fare uso di entrambe queste vie. *Si può riconoscere manifestamente che questo passaggio è esatto?* Sí; lo si vede in modo manifesto. L'attenzione è stata premiata; l'intuizione è soddisfatta. Ma un ragionamento formale potrebbe avere il sopravvento? *Si può anche* dimostrare *che questo passaggio è esatto?*

Dimostrare formalmente ciò che si vede intuitivamente e vedere intuitivamente ciò che è dimostrato formalmente costituiscono un corroborante esercizio mentale; purtroppo in classe non resta mai abbastanza tempo per questo. L'esempio discusso nei paragrafi 12 e 14 è molto significativo a tale riguardo.

Condizione. — Si tratta di una delle parti principali di ogni "problema di determinazione" Si veda *Problemi di determinazio-*

ne, Problemi di dimostrazione, 3 ed anche *Vocaboli, vecchi e nuovi*, 2.

Una condizione si dice *sovrabbondante* quando contiene parti superflue agli effetti della risoluzione che si sta eseguendo; dicesi invece *contraddittoria* in termini se le sue parti sono fra loro contraddittorie o incompatibili, cosicché essa non può essere in alcun modo soddisfatta.

Per esempio, è sovrabbondante, oppure contraddittoria in termini, una condizione espressa mediante piú equazioni lineari il cui numero sia maggiore di quello delle incognite che in esse figurano. Una condizione che invece sia espressa da piú equazioni lineari in numero minore di quello delle incognite che in esse figurano non è sufficiente a determinare le stesse incognite; queste, al contrario, risultano in generale determinate da una condizione espressa da piú equazioni in numero eguale a quelle delle incognite che in esse figurano, ma in qualche caso eccezionale una condizione siffatta può rivelarsi contraddittoria in termini od anche non sufficiente.

Contraddittorio in termini. — Si veda *Condizione.*

Corollario. — Dicesi *corollario* ogni teorema che si deduce facilmente da un altro appena dimostrato. Il vocabolo deriva dal latino *corollarium*, la cui traduzione letterale è "cosa gratuita" o "mancia"

Si può ricavare qualche informazione utile dai dati? — Siamo dinanzi a un problema da risolvere, si tratta di una questione aperta. Si vogliono *determinare i legami che intercedono fra i dati e l'incognita.* Un problema non ancora risolto può essere riguardato come uno spazio aperto fra i dati e l'incognita, un baratro attraverso il quale deve essere lanciato un ponte che potrà essere costruito partendo indifferentemente da una sponda o dall'altra, dall'incognita o dai dati.

Si rifletta sull'incognita! E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita o un'incognita analoga. Ciò suggerisce di prendere l'avvio dall'incognita.

Si rifletta sui dati! *Si può ricavare qualche informazione utile dai dati?* Ciò suggerisce, invece, di prendere l'avvio dai dati.

Sembra sia preferibile iniziare a ragionare dall'incognita (v. *Pappo* e *Procedendo a ritroso*). Tuttavia anche il punto di partenza opposto, dai dati, ha molte probabilità di risultare efficace, deve essere adottato sovente e presenta notevoli applicazioni.

Esempio. Dati tre punti A, B e C, condurre per A una retta che giaccia fra B e C e sia equidistante da questi due punti.

Quali sono i dati? Sono dati tre punti, A, B e C, in posizione, come risulta dalla figura 13. *Si disegni una figura* (v. fig. 13).

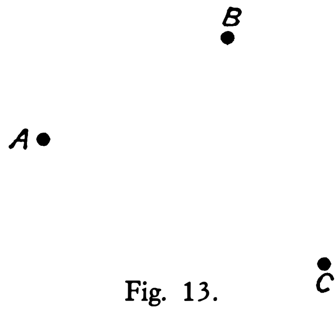


Fig. 13.

Qual è l'incognita? Una retta.

Qual è la condizione? La retta richiesta deve passare per A, giacere fra B e C ed essere equidistante da questi due punti. L'incognita e i dati sono rappresentati in una illustrazione nella quale è posta in luce anche la condizione espressa dall'enunciato (v. fig. 14).

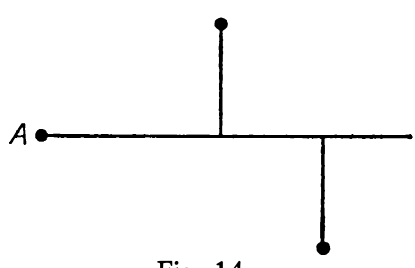


Fig. 14.

La stessa figura, ispirata dalla *definizione* di distanza di un punto da una retta, mostra gli angoli retti menzionati da tale definizione.

Questa illustrazione, cosí come ci appare, è ancora troppo "vuota"; la retta incognita non appare sufficientemente legata ai punti assegnati A, B e C. La figura va completata introducendo qualche elemento ausiliario; ma quale? Anche uno studente abbastanza bravo può arenarsi a questo punto. Naturalmente si possono compiere vari tentativi, ma la domanda migliore per togliersi dall'imbarazzo è senza dubbio: *Si può ricavare qualche informazione utile dai dati?*

Infatti, *quali sono i dati?* Soltanto i tre punti disegnati nella figura 13. I due punti *B* e *C* non sono ancora stati considerati in particolare; da essi non si è ricavata alcuna informazione utile. Ma che si può fare con questi due soli punti? Congiungerli con una retta, come nella figura 15.

La soluzione appare immediatamente sovrapponendo la figura 14 alla figura 15: risultano due triangoli rettangoli congruenti e si

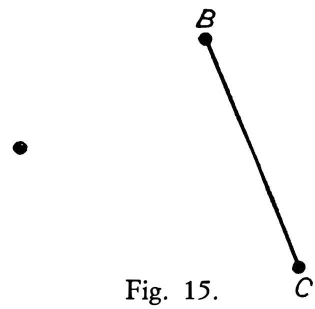


Fig. 15.

riconosce subito l'altro notevolissimo punto per il quale deve passare la retta incognita.

Si può enunciare il problema in altra forma? Lo si può enunciare in forma ancora diversa? — Tali domande sono il principio ispiratore di ogni *Variazione del problema.*

Si ricorra alle definizioni. — Per il commento a questo suggerimento, si veda *Definizione.*

Scomporre e ricomporre. — Sono due importanti operazioni della mente.

Si prende in esame tutto ciò che risveglia l'interesse o stuzzica la curiosità: una casa che si voglia affittare, un telegramma di oscuro significato, qualunque oggetto la cui origine ed il cui fine siano degni di attenzione e qualunque problema che si intenda risolvere. Dell'oggetto si ricava una visione complessiva che, però, non è abbastanza precisa. È un particolare che di solito ci colpisce e la nostra attenzione si focalizza su di esso; poi ci si concentra su un altro dettaglio e poco dopo su un altro ancora. Si possono presentare diverse combinazioni di particolari e, un istante piú tardi, considerandolo di nuovo nel suo complesso, si vede l'oggetto sotto una luce diversa. In effetti si è scomposto il tutto in parti e poi si sono ricomposte queste parti in un tutto piú o meno diverso da quello iniziale.

1. Scendendo nei particolari, ci si può smarrire. Troppi particolari o particolari troppo minuziosi sono un pesante fardello per la mente; possono sviare l'attenzione dal punto fondamentale o addirittura impedire di accorgersi di esso. Allo stesso modo gli alberi fitti vietano di scorgere la foresta.

Naturalmente non si desidera sprecare il proprio tempo con un dettaglio insignificante e si dovrebbe riservare ogni fatica alla parte essenziale del problema. La difficoltà sta in questo: a priori non è possibile prevedere quali particolari si riveleranno alla fine importanti e quali no.

È quindi necessario, per prima cosa, comprendere il problema in generale; dopo di ciò, ci si troverà in una posizione piú favorevole per giudicare quali dettagli siano i piú notevoli. E, dopo avere esaminato uno o due punti essenziali, si vedrà ancora meglio quali ulteriori particolari devono essere riguardati con maggiore attenzione. Si entri quindi nei dettagli e si scomponga gradualmente il problema, ma non prima di aver riconosciuta la necessità di procedere in questo modo.

L'insegnante non può ovviamente aspettarsi che tutti gli studenti agiscano con saggezza a questo proposito; anzi, è proprio una sciocca e pessima abitudine di troppi allievi prendere in considerazione i particolari prima di avere compreso il problema nel suo complesso.

2. Consideriamo i problemi di matematica e, in particolare, i "problemi di determinazione".

Dopo avere compreso il problema nel suo complesso, il significato e l'essenza dell'esercizio, come partire volendo scendere ai dettagli? In quasi tutti i casi, è conveniente iniziare dall'esame delle parti principali del problema, che sono l'incognita, i dati e la condizione; è cioè utile cominciare l'esame dei particolari con le domande: *Qual è l'incognita? Quali sono i dati? Qual è la condizione?*

Volendo analizzare ulteriormente i dettagli, cosa si deve fare? Molto spesso è vantaggioso esaminare ogni dato come a sé stante, *separare le varie parti della condizione* ed esaminare queste ad una ad una.

Soprattutto nel caso di un problema piuttosto difficile, può essere necessario procedere ad una scomposizione piú minuziosa e analizzare di nuovo in seguito i particolari che, a prima vista, erano parsi trascurabili. Cosí può essere anche indispensabile *ricorrere alla definizione* di un determinato ente, introdurre nuovi elementi in virtú della definizione stessa e analizzare gli elementi introdotti in questo modo.

3. Dopo avere scomposto il problema, si tenta di ricombinarne le parti costituenti in qualche maniera distinta. È bene cercare soprattutto di sistemare gli elementi del problema iniziale in modo da ottenere un problema diverso e piú accessibile che possa essere convenientemente impiegato come problema ausiliario.

Naturalmente esistono molteplici possibili combinazioni siffatte. I problemi complessi esigono combinazioni recondite, notevoli, originali e spesso nella scelta della combinazione si rivela tutta l'abilità del risolutore. Ma vi sono alcuni tipi di combinazioni usati comunemente, abbastanza semplici, sufficienti a risolvere i problemi meno difficoltosi; bisognerebbe conoscere tali schemi senza incertezze e tentarne sempre l'applicazione, anche se poi si dovrà ripiegare su metodi meno immediati.

Le combinazioni piú consuete ed efficaci sono suscettibili di una chiara classificazione formale. Per costruire un nuovo problema da uno assegnato, si può:

1) mantenere la stessa incognita e mutare i dati e la condizione; oppure

2) mantenere gli stessi dati e mutare l'incognita e la condizione; oppure

3) mutare sia l'incognita sia i dati.

Esaminiamo questi casi.

I casi 1) e 2) coincidono. Infatti si possono mantenere identici sia i dati sia l'incognita e trasformare il problema semplicemente cambiando la forma della condizione. Per esempio, i due seguenti problemi, che pure sono manifestamente equivalenti fra loro, non sono identici:

Costruire un triangolo equilatero di dato lato.
Costruire un triangolo equiangolo di dato lato.

La differenza fra questi due enunciati è minima, ma quella fra altre proposizioni di questo tipo può essere rilevante. Questi casi sono molto importanti sotto certi punti di vista, ma qui ne omettiamo la discussione, perché essa esigerebbe troppo spazio; pertanto rimandiamo il lettore a *Problemi ausiliari*, 7, ultima nota.

4. *Mantenere la stessa incognita* e mutare i dati e la condizione è un metodo che sovente si rivela utile a trasformare il problema assegnato. Il suggerimento *Si rifletta sull'incognita!* ispira proprio

problemi aventi la stessa incognita. Si può tentare di ricorrere ad un problema già noto di questo tipo: *Ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga.* Se non si riesce a ricordare alcun problema siffatto, si può cercare di inventarne uno: *Si possono trovare altri dati atti a determinare l'incognita?*

Un nuovo problema ha una probabilità di rivelarsi utile tanto maggiore quanto piú intimamente è connesso con quello proposto; quindi, conservando la stessa incognita, è bene cercare di mantenere anche qualche dato e qualche parte della condizione e di variare impercettibilmente solo un dato o due ed una parte inessenziale di condizione. Un metodo efficace è quello di togliere qualcosa senza aggiungere nulla; si conservi la stessa incognita, *si tenga conto soltanto di una parte di condizione trascurando l'altra*, e ciò senza introdurre alcuna altra clausola e alcun altro dato. Esempi e commenti relativi a questo caso sono esposti nei successivi punti 7 e 8.

5. *Mantenendo gli stessi dati*, si può cercare di introdurre qualche nuova incognita conveniente e piú facile da determinare. Una incognita siffatta deve essere ricavata dai dati iniziali e ci si riferisce implicitamente ad essa con la domanda: *Si può ricavare qualche informazione utile dai dati?*

Si noti a questo punto la necessità di due requisiti. In primo luogo la nuova incognita dovrebbe essere sempre piú accessibile, ossia piú facilmente ricavabile dai dati dell'incognita iniziale. Secondariamente, la nuova incognita dovrebbe essere conveniente, cioè dalla sua determinazione dovrebbe seguire un vantaggio concreto ai fini della ricerca dell'incognita di partenza. In poche parole, la nuova incognita dovrebbe essere una specie di *trampolino di lancio* verso la risoluzione; come una pietra sporgente dalle acque di un fiume, essa, una volta raggiunta, dovrebbe aiutare a passare all'altra sponda.

La nuova incognita dovrebbe essere sia accessibile sia utile, ma in pratica ci si deve accontentare spesso di molto meno. In mancanza di meglio, non è insensato ricavare dai dati qualche informazione che abbia qualche probabilità di riuscire proficua ed inoltre provare una nuova incognita intimamente connessa con quella iniziale anche se, a priori, questa pure non sembra particolarmente facile da determinare.

Per esempio, se si tratta di calcolare la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo, come nel paragrafo 8, si può introdurre quale nuova incognita la diagonale di una faccia dello stesso solido. Si può procedere in questò modo o perché *si sa* che, nota la misura della diagonale di una faccia, nell'ipotesi del problema si può calcolare anche la misura della diagonale del solido (v. paragrafo 10), o perché si riconosce la facilità di ottenere la misura della diagonale di una faccia e *si intuisce* che tale calcolo possa risultare utile per quello della misura della diagonale del solido. Si confrontino queste considerazioni con quelle esposte sotto il titolo *Si è fatto uso di tutti i dati?*, nel punto 1.

Se invece si chiede di costruire una circonferenza, si devono determinare centro e raggio di questa; quindi si può dire che questo problema consta di due parti. Talvolta una parte si può ottenere piú facilmente dell'altra, perciò è bene dedicare sempre un briciolo di tempo e di attenzione all'esame di un'eventualità siffatta: *Si riesce a risolvere almeno una parte del problema?* Rispondendo a tale domanda, si valutano le possibilità: È vantaggioso prendere in considerazione prima il centro o prima il raggio? Simili domande risultano spesso molto utili. Nei problemi piú complessi ed in quelli che presentano difficoltà profonde, il concetto base della risoluzione consiste proprio nel cominciare a svolgere qualche parte essenziale, ma piú accessibile delle altre.

6. *Mutando sia l'incognita sia i dati*, ci si allontana dal problema iniziale piú che nei casi dianzi descritti. Ciò non lascia, naturalmente, troppo soddisfatti; si avverte il pericolo di perdere il contatto con l'esercizio di partenza. Ma si può essere costretti a scegliere questa via, quando le altre variazioni meno radicali non abbiano condotto ad alcun risultato soddisfacente, e si è tentati di allontanarsi cosí dal problema iniziale, quando il nuovo problema presenti maggiori probabilità di portare al successo. *Si possono cambiare i dati, oppure l'incognita, oppure se necessario tutte queste quantità, in modo che la nuova incognita ed i nuovi dati siano quasi eguali ai precedenti?*

Un metodo interessante per cambiare sia i dati che l'incognita è quello di scambiare l'incognita con uno dei dati (v. *Si può sfruttare il risultato?*).

7. *Esempio.* Costruire un triangolo di cui siano noti un lato a, l'altezza h relativa ad a e l'angolo α opposto al medesimo lato.

Qual è l'incognita? Un triangolo.

Quali sono i dati? Due segmenti, a e h, e l'angolo α.

Avendo un po' di pratica di costruzioni geometriche, è spontaneo tentare di ricondurre un problema come questo alla determinazione di un punto. Si disegna un segmento BC eguale al lato assegnato a e allora si tratta di trovare il vertice A del triangolo che si oppone a tale lato (v. fig. 16). Ecco dunque un problema nuovo.

Qual è l'incognita? Il punto A.

Quali sono i dati? Il segmento h, l'angolo α e i due punti B e C, in posizione.

Qual è la condizione? Il segmento di perpendicolare compreso tra A e il lato BC deve essere eguale ad h e l'angolo BAC eguale ad α.

In effetti il problema assegnato è stato trasformato in un nuovo problema mutando sia l'incognita che i dati. L'incognita iniziale era un triangolo, quella attuale un punto; alcuni dati, e precisa-

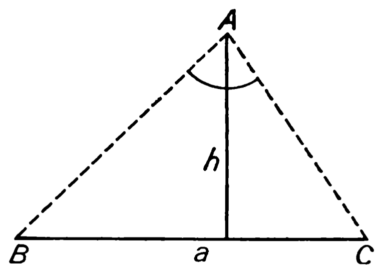


Fig. 16.

mente h e α, sono gli stessi nei due problemi, ma nel primo di essi era dato anche il segmento a, mentre ora si conoscono due punti, B e C, in posizione.

Il problema attuale non è difficile. Il seguente suggerimento porta molto vicino alla soluzione.

Si separino le varie parti della condizione. La condizione attuale consta di due parti, concernenti l'una h e l'altra α. Il punto incognito deve essere:

I) alla distanza h dal segmento BC;

II) vertice di un angolo di assegnata ampiezza ed i cui lati passino uno per B e l'altro per C.

Quando si tenga conto soltanto di una parte di condizione trascurando l'altra, il punto incognito non è completamente determinato. Vi sono infiniti punti che soddisfano alla parte I) della condizione: tutti i punti di una retta parallela a BC e distante h dalla retta cui tale segmento appartiene.[3] Tale parallela è il luogo geo-

[3] La congiungente B e C divide l'intero piano in due semipiani. Conveniamo che il vertice A debba giacere in uno particolare di tali semipiani, in modo da potere limitarci a considerare solo una retta parallela a BC; altrimenti le parallele da prendere in considerazione sarebbero due.

metrico dei punti del piano che soddisfano alla parte I) di condizione. D'altro canto, il luogo geometrico dei punti del piano che soddisfano alla parte II) di condizione è un certo arco di circonferenza passante per B e C. Entrambi questi luoghi geometrici possono essere descritti; il loro punto di intersezione è quello richiesto dal problema.

Il procedimento ora indicato presenta un notevole interesse; nella risoluzione di problemi di costruzione geometrica, spesso è opportuno procedere in questo modo. Il problema viene ricondotto alla determinazione di un punto che risulta l'intersezione di due luoghi geometrici.

Ma un interesse ancora maggiore presenta un particolare passaggio del procedimento esposto; nella risoluzione dei "problemi di determinazione" di qualunque tipo, si può seguire questa traccia: *Si tenga conto soltanto di una parte di condizione, trascurando l'altra.* Cosí facendo, si snellisce la condizione del problema iniziale e si semplificano i concetti essenziali, ampliando i limiti dell'incognita. *Fino a che punto risulta allora determinata l'incognita e come può essa variare?* Da questa domanda, infatti, ha origine un nuovo problema. Se l'incognita, come nell'esempio di poco fa, è un punto del piano, la risoluzione di questo nuovo problema equivale alla determinazione del luogo geometrico descritto da tale punto. Se l'incognita, come il quadrato richiesto nel paragrafo 18, è un ente matematico diverso, si tratta di considerare un conveniente insieme di enti e di caratterizzarlo rigorosamente. Nell'esempio che considereremo al successivo punto 8, l'incognita non è un ente matematico; in un caso del genere, può essere utile considerare, caratterizzare, analizzare oppure elencare quegli enti che soddisfano ad una determinata parte della condizione relativa all'incognita del problema proposto.

8. *Esempio.* In un gioco di parole crociate, si incontra la seguente definizione:

"Fiume italiano che scorre nei due sensi (4 lettere)."

Qual è l'incognita? Il nome di un fiume italiano.

Qual è la condizione? Si tratta di un nome di quattro lettere, precisamente il nome di un fiume della nostra penisola il quale scorre nei due sensi.

La condizione è sufficiente a determinare l'incognita? No. O meglio, la condizione può essere sufficiente, ma non è certo tale quella parte di essa che ci appare chiara: ci sono troppi fiumi italiani che hanno un nome di quattro lettere.

Per di piú la condizione è volutamente espressa in forma sibillina. Poiché nessun fiume può scorrere in due sensi, si può sospettare che le parole della definizione vogliano significare che il nome richiesto debba potere essere letto nei due sensi. Sarà bene tenere conto di questa interpretazione della traccia.

Si separino le varie parti della condizione. La condizione di questo problema consta di due parti, l'una relativa al significato del nome e l'altra alla sua ortografia. Il vocabolo incognito deve essere:

I) il nome proprio di un fiume italiano;

II) un nome di quattro lettere che possa leggersi nei due sensi.

Quando *si tenga conto soltanto di una parte di condizione, trascurando l'altra*, l'incognita non risulta completamente determinata. Molti vocaboli soddisfano alla prima parte della condizione ed essi costituiscono un certo insieme del quale si deve considerare l'intersezione con l'insieme dei vocaboli che soddisfano alla seconda parte della condizione. È quindi spontaneo considerare attentamente la parte I), sforzandosi di ricordare nomi propri di fiumi italiani ed esaminare quale fra questi abbia la lunghezza desiderata e possa essere letto nei due sensi. Si può allora cominciare: Arno, Taro, Liri, Sele, Reno, Elsa,....

... Adda, naturalmente!

9. Al punto 3 sono stati classificati i vari metodi possibili per ottenere un nuovo "problema di determinazione" mediante la combinazione di determinati elementi di un assegnato problema dello stesso tipo. Se non ci si vuole limitare ad introdurre un unico problema nuovo, ma si desidera considerare due o piú problemi derivati, si devono contemplare numerose possibilità, la cui classificazione richiederebbe troppo tempo.

Si possono presentare anche altre combinazioni. In particolare, la risoluzione di un "problema di determinazione" può dipendere da quella di un "problema di dimostrazione". Si tratta di una circostanza notevolissima, che non sarà però analizzata in questo volume per mancanza di spazio.

10. Si possono aggiungere alcune brevi considerazioni sui "problemi di dimostrazione"; esse presentano una chiara analogia con i commenti relativi ai "problemi di determinazione" esposti nei punti 2-9.

Dopo avere considerato un problema di questo genere nel suo complesso, in generale sarebbe necessario esaminare le parti principali del medesimo teorema, ossia l'ipotesi e la tesi. Tali parti andrebbero comprese a fondo: *Qual è l'ipotesi? Qual è la tesi?*

Se necessario scendere alla considerazione di parti piú particolari, *si separino le varie parti dell'ipotesi* e si fissi l'attenzione su ciascuna di esse indipendentemente dalle altre. Si può poi procedere all'esame di altri dettagli scomponendo il problema assegnato sempre piú minuziosamente.

Dopo avere eseguito una scomposizione siffatta, si può cercare di ricomporre gli elementi del medesimo "problema di dimostrazione" in un nuovo assetto, in particolare in un nuovo "problema di dimostrazione". Si può:

1) *Mantenere la stessa tesi* e mutare l'ipotesi. È bene tentare sempre di sfruttare un simile teorema: *Si rifletta sulla tesi! E ci si sforzi di ricordare qualche teorema precedentemente dimostrato avente la stessa tesi oppure una tesi analoga.* Se non si riesce a ricordare un teorema ausiliario di questo tipo, si può sempre cercare di inventarne uno: *Si può trovare un'altra ipotesi dalla quale segua la stessa tesi?* È possibile mutare l'ipotesi trascurandone qualche parte senza tuttavia aggiungerne alcuna nuova: *Si tenga conto di una parte soltanto di ipotesi, trascurando l'altra; la tesi resta valida?*

2) *Mantenere la stessa ipotesi* e mutare la tesi: *Si può ricavare qualche informazione utile dall'ipotesi?*

3) *Mutare sia l'ipotesi che la tesi.* Procedere in questo modo è molto spontaneo quando la variazione di una sola delle parti principali del "problema di dimostrazione" assegnato non abbia condotto ad alcun vantaggio. *Si può cambiare l'ipotesi, oppure la tesi, oppure se necessario entrambe, in modo che la nuova ipotesi e la nuova tesi siano quasi eguali alle precedenti?*

Omettiamo qui la classificazione delle diverse circostanze che possono presentarsi quando, nella risoluzione di un assegnato "problema di dimostrazione", si ricorre ad uno o piú problemi dello stesso tipo, oppure quando si collega quello iniziale ad un opportuno "problema di determinazione".

Definizione. — Dicesi *definizione* di un qualunque termine ciascuna proposizione che ne esprima il significato in funzione di termini già noti.

1. I *vocaboli tecnici* che si incontrano in matematica sono di due specie. Alcuni sono assunti come primitivi e pertanto non possono essere definiti; altri sono considerati come derivati e sono definiti nel debito modo, ossia il loro significato viene spiegato ricorrendo a termini primitivi e a termini derivati, ma precedentemente definiti in maniera rigorosa. Quindi non si dà, in generale,

una definizione rigorosa di concetti primitivi come quelli di "punto", "retta" e "piano";[4] ma si hanno definizioni rigorose di "bisettrice di un angolo", "circonferenza", "parabola", ecc.

Ecco come si può procedere, per esempio, per definire la parabola. Diciamo *parabola* il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso e da una retta fissa. Questo punto e questa retta assegnati si chiamano rispettivamente il *fuoco* e la *direttrice* della parabola. È sottinteso che il fuoco non giace sulla direttrice.

Supponiamo che il lettore non conosca il significato dei vocaboli parabola, fuoco della parabola, direttrice della parabola; ma facciamo l'ipotesi che egli sappia il significato di tutti gli altri termini che entrano nella precedente definizione, ossia quelli di punto, retta, piano, distanza di un punto da un altro punto o da una retta, punto fisso, luogo geometrico dei punti del piano, ecc.

2. *Le definizioni nei dizionari* non differiscono troppo sensibilmente da quelle matematiche almeno all'apparenza, ma sono scritte con uno spirito diverso.

Chi compila un dizionario si preoccupa del significato che le parole assumono nel linguaggio corrente; egli, naturalmente, ne *accetta* il significato ordinario e lo enuncia in forma di definizione il piú possibile precisa.

Un matematico, invece, non è ossessionato dalla preoccupazione di conservare il significato consueto ai vocaboli tecnici che gli occorrono; o almeno, non è questa la sua preoccupazione maggiore. Poco gli importa ciò che possano significare nel linguaggio ordinario "circonferenza" o "parabola" o altri termini siffatti. Le definizioni di matematica *creano* il significato matematico.

3. *Esempio.* Costruire un punto di intersezione di una retta assegnata con una parabola della quale sono dati il fuoco e la direttrice.

Il modo con cui si inizia a risolvere qualunque problema dipende essenzialmente dal grado di conoscenza che si ha sull'argomento cui si riferisce l'enunciato proposto; cosí i primi approcci al problema attuale sono determinati quasi esclusivamente dall'entità delle cognizioni che si possiedono intorno alle proprietà della

[4] Circa questo modo di procedere, accenniamo che diversamente si comportarono Euclide ed i geometri greci, che invece definirono anche il punto, la retta ed il piano. Ma le "definizioni" che essi avanzarono di tali enti ci appaiono oggi poco rigorose, avendo piuttosto il carattere di descrizioni intuitive. Naturalmente illustrazioni di questo tipo sono lecite e spesso convenienti in campo scolastico; ma non possono essere ritenute definizioni matematiche, proprio per il significato che oggi noi attribuiamo a questa locuzione.

parabola. Conoscendo molte cose di tale curva, si potrebbe tentare di sfruttare la propria cultura in materia e di ricavarne un certo aiuto: *Si conosce un teorema che potrebbe essere utile? È noto un problema connesso con questo?* Se invece non si ha troppa confidenza con la parabola, il suo fuoco e la sua direttrice, ci si sente piuttosto imbarazzati dinanzi a tali termini e, naturalmente, si desidera liberarsene. Come si può eliminarli? Ascoltiamo il dialogo fra un insegnante ed uno studente alle prese con il problema assegnato. Essi hanno già introdotto *un conveniente sistema di notazioni*, dicendo P uno qualsiasi dei punti di intersezione incogniti, F il fuoco e d la direttrice della parabola; r indica la retta data.

"*E qual è l'incognita?*"

"Il punto P."

"*Quali sono i dati?*"

"Le rette r e d ed il punto F."

"*Qual è la condizione?*"

"Il punto P deve essere una delle intersezioni della retta r con la parabola di fuoco F e direttrice d."

"Va bene. Hai una piccola possibilità, lo so, di studiare la parabola; ma penso che tu possa dire intanto che cos'è una parabola."

"La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice."

"Sí; questa è proprio la definizione della quale dobbiamo fare uso: *Si ricorra alla definizione*. E, in virtú di tale definizione, cosa si può dire del punto P?"

"Il punto P appartiene alla parabola, quindi è equidistante da r e da F."

"Bene! *Si disegni una figura.*"

Lo studente tratteggia nella figura 17 i segmenti PF e PQ, quest'ultimo perpendicolare alla d.

"Ora, *si può enunciare il problema in altra forma?*"

. . .

"Si può enunciare in altro modo la condizione del problema, per esempio ricorrendo ai segmenti tracciati poco fa?"

"Il punto P giace sulla retta r ed è tale che $PF = PQ$."

"Certo, ma esprimiti meglio. Cos'è PQ?"

"Il segmento di perpendicolare condotto da P alla retta d, ossia la distanza di P dalla d."

"Benissimo. E allora si potrebbe enunciare il problema in altra forma? Ma, per piacere, l'enunciato che mi dirai sia chiaro, preciso e scorrevole."

"Sopra una retta assegnata *r*, determinare un punto *P* equidistante da un punto dato *F* e da una retta data *d*."

"Nota il vantaggio offerto da questo enunciato rispetto a quello iniziale. L'enunciato primitivo del problema era denso di vocaboli tecnici poco familiari: parabole, fuoco, direttrice; esso sembrava persino ampolloso e certo piú complesso di quanto fosse in realtà. Ora tutti quei termini tecnici cosí scomodi sono scomparsi: il problema è stato *semplificato*. Bene!"

4. *L'eliminazione di vocaboli tecnici* è il risultato ottenuto nell'esempio precedente. L'enunciato del problema assegnato con-

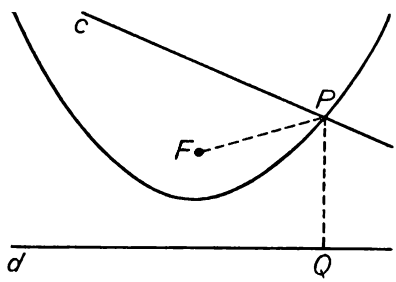


Fig. 17.

teneva alcuni vocaboli di questo tipo (parabola, fuoco, direttrice), dei quali alla fine ci si è liberati.

Per eliminare un vocabolo tecnico, è necessario conoscerne la definizione; ma tale conoscenza non è sufficiente: si deve applicare la definizione. Cosí, nell'ultimo esempio, non è stato sufficiente ricordare la definizione della parabola; il passaggio essenziale consistette nell'introdurre in figura i segmenti *PF* e *PQ* la cui eguaglianza seguiva appunto dalla stessa definizione. Questo è il procedimento tipico. Durante il processo di comprensione del problema, si introducono elementi nuovi, fra i quali in virtú della definizione, si stabiliscono delle relazioni; se tali connessioni ne esprimono per intero il significato, si può affermare di avere fatto uso delle definizioni e quindi, grazie a questo impiego, sparisce il vocabolo tecnico.

Il procedimento ora riassunto può dirsi *ricorso alle definizioni*.

Il ricorso alla definizione di un vocabolo tecnico consente di eliminare il medesimo termine, ma obbliga ad introdurre elementi nuovi e a considerare nuove connessioni. La visione del problema ne risulta modificata e ciò ha una notevole importanza.

Ad ogni modo, qualche assetto diverso, o qualche *Variazione del problema*, conduce senz'altro alla soluzione.

5. *Definizioni e teoremi noti.* Se il vocabolo "parabola" è noto e si ha una vaga idea della forma di questa curva, ma non si conosce proprio altro di essa, ovviamente non si può riuscire a risolvere né il problema proposto nell'esempio di poco fa né alcun altro serio problema geometrico relativo alla parabola. Per superare le difficoltà di tali esercizi, che grado di conoscenza è necessario?

La geometria, intesa come scienza, si può pensare costituita da assiomi, definizioni e teoremi. Della parabola non si parla negli assiomi che trattano soltanto con concetti primitivi, quali il concetto di punto, di retta e cosí via. Qualunque argomentazione geometrica concernente la parabola, qualunque problema che si riferisce a tale curva, devono presentarsi in modo da indurre il risolutore ad appellarsi o alla definizione della linea medesima o a teoremi ad essa relativi. Per risolvere un problema siffatto, occorre conoscere almeno quella definizione, ma sarebbe bene avere presente anche alcuni teoremi.

Naturalmente queste considerazioni, dedicate in particolare alla parabola, valgono per qualunque altro concetto derivato. Quando ci si accinge a risolvere un problema nel quale intervenga un simile concetto, non si può sapere a priori se sarà piú conveniente invocare la definizione o certi teoremi; ma è certo che si dovrà fare uso di quella o di questi.

In alcuni casi, però, non c'è possibilità di scelta. Se è nota solo la definizione di un concetto, si è obbligati ad applicare questa; la stessa cosa avviene quando si sappia ben poco oltre alla definizione. Ma quando siano noti molti teoremi intorno ad un ente piuttosto familiare, è probabile che fra questi si trovi una proposizione vantaggiosa.

6. *Definizioni diverse.* Comunemente la sfera è definita come il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno da un punto fisso una distanza assegnata. Ma la sfera può anche essere definita come la superficie generata da una circonferenza che ruoti intorno ad un diametro fisso. E ci sono pure altre definizioni della sfera, tutte accettabili.

Cosí, quando si debba risolvere un problema nel quale intervengano concetti derivati, quale il concetto di sfera oppure quello di parabola, e si voglia ricorrere alle definizioni, è necessario scegliere. E spesso il successo dipende proprio dalla scelta della definizione piú conveniente, che, è ovvio, può essere diversa da problema a problema.

Il calcolo dell'area della superficie della sfera costituí, anche ai tempi di Archimede, un problema grave e complesso. Archimede, che lo risolse elegantemente, dovette scegliere fra le due definizioni di sfera che abbiamo dianzi riportate: egli preferí la seconda. Considerò poi un poligono regolare, con un numero pari di lati, inscritto nella circonferenza generatrice; due vertici opposti di un poligono siffatto risultavano gli estremi del diametro fisso. La circonferenza e il poligono suddetti, ruotando attorno alla retta del medesimo diametro, generano rispettivamente la sfera ed una superficie convessa costituita dalle superficie laterali di due coni aventi i vertici nei due estremi del medesimo diametro fisso e dalle superficie laterali di un certo numero di tronchi di cono compresi fra i due coni terminali. Considerando successivamente poligoni regolari inscritti nella circonferenza e ciascuno con un numero di lati doppio di quello del poligono che immediatamente lo precede nella successione che cosí si viene a costruire, si determina una successione di superficie dello stesso tipo di quelle menzionate in particolare poco fa. Tali superficie tendono a confondersi con quella sferica e questa fu l'osservazione fondamentale di Archimede; infatti il geometra greco, per successive approssimazioni, dalla conoscenza dell'area di queste superficie risalí a quella della superficie della sfera. Se avesse concepito tale solido come luogo geometrico dei punti dello spazio aventi una distanza assegnata da un punto fisso, egli non avrebbe potuto valersi di un'approssimazione cosí semplice e immediata.

7. Il ricorso alle definizioni è conveniente non solo per scoprire, ma anche per verificare un procedimento.

Qualcuno può presentare una nuova, ipotetica risoluzione del problema della determinazione dell'area della superficie della sfera, risolto rigorosamente da Archimede. Se questo tale ha idee molto imprecise sulla sfera, la risoluzione che egli avanza non reggerà affatto. Ma egli potrebbe anche avere nozioni chiare sulla medesima superficie; tuttavia, se le applica male nel corso del procedimento, darà l'impressione di saperne ben poco, perché la soluzione non può in tal caso riuscire accettabile. Quindi, ascoltando l'esposizione del suo ragionamento, si attenda il momento in cui egli si accingerà a dire qualcosa di notevole sulla sfera e ne applichi la definizione, oppure invochi teoremi ad essa relativi; se tale momento non giungerà, l'intera risoluzione è destinata a cadere.

Naturalmente si possono verificare con questo medesimo metodo non solo le risoluzioni eseguite da altri, ma anche le proprie. *Si sono considerati tutti i concetti essenziali relativi al problema*? Come è stato usato questo concetto? Si è ricorsi al suo significato, alla sua definizione? Si sono applicate le verità fondamentali e i teoremi che si conoscono su di esso?

L'applicazione del ricorso alle definizioni per riconoscere la validità di un procedimento venne messa in risalto da Pascal, che stabilí la seguente regola: "Si sostituisca mentalmente la definizione all'ente definito." Ciò equivale a sostituire mentalmente la proposizione definiente al termine definito. L'importanza del ricorso alle definizioni per escogitare un procedimento fu invece proclamata da Hadamard.

8. Il ricorso alle definizioni è una notevole operazione della mente. Per comprendere come mai siano tanto importanti le definizioni dei vocaboli, si dovrebbe innanzi tutto comprendere l'importanza degli stessi vocaboli. È difficile applicare la mente senza ricorrere a parole, a segni, a simboli di qualche specie. In questo senso, le parole ed i segni hanno valore. Le popolazioni primitive attribuiscono ad essi virtú magiche; noi possiamo comprendere simili superstizioni, ma non le accettiamo. Noi dovremmo sapere che la forza di una parola non risiede nel suono, nel *vocis flatus*, nel caldo tono di voce di chi parla, bensí nelle idee che proprio quel vocabolo richiama al nostro animo e, soprattutto, nelle verità sulle quali tali idee sono fondate.

Quindi è un'ottima abitudine risalire sempre al significato e alle verità che ogni vocabolo cela. Ricorrendo alle definizioni, il matematico cerca di impossessarsi delle intime connessioni fra enti di matematica, implicitamente contenute nei vocaboli tecnici: esattamente come il medico riconosce i risultati di esperimenti rigorosi dietro i vocaboli tecnici della medicina e come ciascun individuo di buon senso desidera essere convinto da verità concrete e non ingannato da vane parole.

Descartes René (1596-1650). — Insigne matematico e filosofo, concepí l'idea di dare un metodo universale per risolvere i problemi, ma non terminò il trattato *Regulae ad directionem ingenii* in cui si proponeva di illustrare la sua concezione. Alcuni frammenti dell'opera, trovati fra i manoscritti dell'illustre pensatore e pubblicati postumi, contengono materiale sulla risoluzione dei problemi piú copioso — e piú interessante — di quello che trovasi esposto nel lavoro maggiormente conosciuto dello stesso autore, *Discours de la Méthode*, che fu scritto in epoca posteriore. Nelle seguenti frasi di Descartes, si vuol vedere l'inizio del lavoro *Regulae ad directionem ingenii.* "Nella mia giovinezza, quando venivo a conoscenza di qualche scoperta straordinaria, mi sforzavo di riscoprire la stessa cosa senza leggere ciò che poteva avere esposto in merito chi l'aveva trovata per primo. Cosí facendo, a poco a poco compresi di applicare determinate regole."

Determinazione, speranza, successo. — Sarebbe grave errore pensare alla risoluzione dei problemi come a un "compito specifico dell'intelletto"; determinazione e intuito possono giocare un ruolo molto importante. Un tiepido proposito, una debole volontà e uno scarso interesse possono non recare troppo danno nel caso di un esercizio banale risolto in classe; ma, per condurre a termine un serio problema scientifico, è necessaria una tenacia capace di affrontare anche anni di applicazione e di amari disinganni.

1. La determinazione ondeggia fra speranza e timore, soddisfazione e disappunto. È facile proseguire quando si ritenga molto prossima la soluzione; ma ben piú difficile è perseverare quando ci si veda soffocati da difficoltà. Ci si esalta quando una previsione si rivela esatta, mentre è umano cedere all'abbattimento e al disinteresse quando la via che si è intrapresa con fiducia si blocchi all'improvviso.

"Il n'est point besoin espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer." [La speranza non è necessaria per cominciare, né il successo per perseverare.] Cosí può affermare una volontà inflessibile, oppure un senso straordinario dell'onore, oppure un animo nobile dinanzi ad una causa giusta e degna. Tuttavia questa specie di determinazione non fa per lo scienziato che ha bisogno di qualche speranza per iniziare e di qualche successo per proseguire. Nelle scienze è necessario mescolare saggiamente determinazione e avvedutezza. Non si prende in considerazione un problema, se esso non presenta qualche interesse; ci si applica intensamente solo se la questione sembra istruttiva; ci si impegna con tutte le proprie forze soltanto se ci si accorge di avere una forte probabilità di riuscita. Una volta deciso di considerare un certo esercizio, di affrontare un determinato problema, lo scienziato si applica ad esso senza riserve,

ma non lo complica senza motivo. Egli non disprezza i piccoli progressi, anzi li esamina con attenzione: *Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo.*

2. Quando uno studente commette errori davvero grossolani, oppure procede in modo cosí lento da esasperare l'insegnante, la causa di tutto ciò è sempre la stessa: egli non ha alcun desiderio di risolvere quel problema, non vuole comprenderlo e quindi non lo comprende veramente. Perciò l'insegnante dovrebbe, se intende aiutare seriamente i suoi alunni, per prima cosa eccitarne la curiosità e far nascere nei loro animi il proponimento di conoscere la soluzione di quell'esercizio. Egli dovrebbe anche lasciare loro un po' di tempo per comprendere il suo intento ed uniformarsi di conseguenza ad esso.

Insegnare a risolvere i problemi significa anche educare la volontà. Proprio risolvendo problemi che non siano per lui troppo facili, lo studente impara a perseverare malgrado gli insuccessi, ad apprezzare i piccoli progressi, ad attendere un'idea luminosa, a concentrarsi il piú possibile su di essa quando gliene venga una. Si può dire che l'educazione matematica si risolve in un completo fallimento se un ragazzo non ha, durante la sua carriera scolastica, l'occasione di familiarizzare con le emozioni causate dalle diverse fasi della risoluzione dei problemi.

Diagnosi. — A questo vocabolo, noi attribuiamo il significato di "profonda valutazione" del lavoro di uno studente. Gli esercizi eseguiti dagli alunni vengono classificati, ma forse un poco troppo severamente. L'insegnante, per valutare l'operato di un ragazzo, deve soppesare accuratamente il buono e il cattivo che scorge in un compito, come un medico, per giudicare le condizioni di un paziente, esegue una diagnosi.

Vogliamo ora interessarci in particolare dell'attitudine degli studenti a risolvere problemi. Come la si può caratterizzare e riconoscere? Si può ottenere qualche informazione esaminando le quattro fasi della risoluzione, poiché in ciascuna di esse ogni alunno si comporta in un modo particolare.

La deficienza piú evidente nel risolvere i problemi consiste nella *incompleta comprensione del problema* dovuta ad una mancanza di concentrazione su di esso. Riguardo alla *compilazione di un piano,* al conseguimento di un'idea generale di risoluzione, sono frequenti due errori che potremmo dire opposti fra loro. Alcuni studenti si gettano a capofitto nei calcoli e nelle costruzioni, senza avere alcun piano o idea; altri attendono passivamente che qualche idea si presenti alla loro mente, senza tuttavia fare nulla per provocare tale lampo di genio. Nello *sviluppo del piano*, i difetti piú comuni sono la trascuratezza e la mancanza di pazienza nel verificare ogni passaggio. Infine molto spesso si nota pigrizia a *verificare il risultato*; lo studente, soddisfattissimo per avere ottenuta una risposta, depone la penna e non si meraviglierebbe neppure dinanzi al risultato piú improbabile.

L'insegnante, dopo avere eseguito un'accurata diagnosi degli errori di questo tipo, può estirparli dalla scolaresca proprio insistendo con le domande fondamentali del nostro schema.

Si è fatto uso di tutti i dati? — Per la progressiva assimilazione di nozioni da parte della nostra mente, giunti alla fine del problema scopriremo di avere di esso una visione molto piú ampia che all'inizio (v. *Progressi e compimento*, **1**). Ma come vanno ora le cose? Abbiamo effettivamente conseguito ciò a cui tendevamo? La nostra attuale concezione è adeguata? *Si è fatto uso di tutti i dati? È stata considerata l'intera condizione?* Nel caso di "problemi di dimostrazione" andrà considerata la domanda corrispondente: *È stata considerata l'intera ipotesi?*

1. Come esempio, riprendiamo il "problema del parallelepipedo rettangolo" iniziato nel paragrafo 8 (e continuato nei paragrafi 10, 12, 14, 15). Può avvenire che uno studente abbia l'idea di calcolare la misura della diagonale di una faccia, $\sqrt{a^2 + b^2}$, arrestandosi poi molto perplesso. L'insegnante può soccorrerlo con la domanda: *Si è fatto uso di tutti i dati?* È poco probabile che l'alunno non si accorga allora che l'espressione $\sqrt{a^2 + b^2}$ in effetti non contiene il terzo dato, c. Quindi egli potrebbe cosí essere indotto a far entrare in gioco c; pertanto vi è una buona probabilità che il ragazzo fissi l'attenzione sul triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente $\sqrt{a^2 + b^2}$ e c e la cui ipotenusa è la diagonale del parallelepipedo della quale si sta cercando la misura. (Per un altro esempio, si veda *Ausiliari elementi*, 3.)

Le domande che abbiamo qui preso in considerazione sono molto importanti. L'esempio precedente mette bene in luce come esse possano essere usate per conseguire la soluzione di un problema e aiutarci a individuare il punto debole della concezione che abbiamo del medesimo esercizio. Tali quesiti sanno richiamare l'attenzione sopra un dato trascurato: sapendo di non avere tenuto conto di un determinato elemento, naturalmente si tenterà subito di farlo entrare in gioco. Quindi noi possediamo una chiave, abbiamo una linea di condotta ben definita da seguire e ottime probabilità di scoprire un'idea felice.

2. Le stesse domande non solo si rivelano utili per costruire una dimostrazione o un ragionamento, ma anche per verificare l'una o l'altro. Per maggiore chiarezza, supponiamo di voler stabilire la validità della dimostrazione di una proposizione la cui ipotesi consta di tre parti, tutte e tre essenziali affinché il teorema risulti vero. Cioè, trascurando una qualunque di queste tre parti, il teorema non vale piú. Allora, se la dimostrazione eseguita non tiene conto di una qualsiasi parte dell'ipotesi, tale dimostrazione è senz'altro errata. In essa *è stata considerata l'intera ipotesi?* Si è fatto uso, in particolare, della prima parte dell'ipotesi? In quale punto, precisamente, si fa ricorso a questa prima parte? Dove si ricorre alla seconda parte della medesima? E dove alla terza? Rispondendo a tutte queste domande, si verifica la dimostrazione.

Una verifica siffatta è efficace, istruttiva e realmente necessaria per una comprensione profonda, quando la dimostrazione sia lunga e laboriosa — come ben sa *Il lettore intelligente.*

3. Le domande qui considerate hanno lo scopo di renderci sicuri di possedere una chiara e completa visione del problema. La concezione che abbiamo di esso è certamente incompleta, se abbiamo trascurato qualche parte essenziale dell'ipotesi o qualche dato altrettanto notevole. Ma essa è incompleta anche se abbiamo sbagliato ad interpretare il significato di qualche termine fondamentale. Quindi, per sperimentare l'esattezza della nostra concezione, dovremmo chiederci anche: *Sono stati presi in esame tutti i concetti essenziali che intervengono nel problema?* Si veda *Definizione*, 7.

4. Le precedenti considerazioni sono però da prendere con una certa cautela ed entro certi limiti. Infatti il loro campo di validità è limitato a quei problemi che sono "perfettamente determinati" e "ragionevoli".

Un "problema di determinazione" perfettamente determinato e ragionevole deve essere corredato di tutti i dati necessari, senza presentare un solo dato superfluo; anche la condizione su cui esso si fonda deve essere sufficiente, non contraddittoria in termini né sovrabbondante. Naturalmente, per risolvere un problema siffatto, si deve far uso di tutti i dati e tenere conto dell'intera condizione.

L'oggetto di un "problema di dimostrazione" è un teorema di matematica. Supponiamo si tratti di un problema perfettamente determinato e ragionevole; allora ogni affermazione contenuta nell'ipotesi del teorema deve essere essenziale per dimostrare la tesi. Ovviamente, in una dimostrazione siffatta, sarà necessario considerare ogni parte dell'ipotesi.

Si presuppone sempre che i problemi di matematica proposti nei testi scolastici consueti siano perfettamente determinati e ragionevoli. Ma è bene non adagiarsi su questa certezza; al minimo dubbio, ci si chieda: *È possibile soddisfare alla condizione?* Rispondendo a tale domanda, o ad una analoga, ci si può convincere, almeno in un certo senso, che il problema affrontato è onesto, come si era supposto.

La domanda scelta come titolo del presente articoletto e le domande ad essa connesse possono e dovrebbero essere rivolte senza alcuna modifica solo quando ci si trovi in presenza di un problema perfettamente determinato e ragionevole, oppure quando non si abbia almeno alcun motivo per temere il contrario.

5. Ci sono anche problemi non matematici che, sotto certi aspetti, possono essere "perfettamente determinati" Per esempio, alcuni ottimi problemi di scacchi sono proposti in modo che ammettano una, ed una sola, soluzione e che nessun pezzo resti inutilizzato ai margini della scacchiera.

I *Problemi pratici* relativi alla vita di ogni giorno, in generale, sono tutt'altro che perfettamente determinati ed esigerebbero commenti particolari, completamente diversi da quelli esposti qui in relazione alle suddette domande.

È noto un problema connesso con questo? — Difficilmente si può pensare ad un problema assolutamente nuovo, diverso e slegato da ogni altro problema già noto; se poi un problema siffatto esistesse veramente, sarebbe insolubile. Infatti, nella risoluzione di un problema, ci si appella sempre a qualche altro problema precedentemente risolto e si fa uso del risultato di quest'ultimo, oppure del metodo della sua risoluzione, oppure dell'esperienza acquisita risolvendolo. E, naturalmente, il problema al quale ci si ispira deve risultare in qualche modo connesso con quello attuale. Di qui l'utilità della domanda: *È noto un problema connesso con questo?*

In generale, non è difficile ricordare problemi precedentemente risolti che presentino dei legami con quello che si sta studiando.

Anzi, si possono persino trovare troppi problemi siffatti e allora la difficoltà sta solo nella scelta di quello piú utile. Si deve trovare qualche problema connesso con uno proposto; a tale scopo, *Si rifletta sull'incognita*, oppure si proceda alla ricerca ricorrendo ai metodi fondati sulla *Generalizzazione*, sulla *Particolarizzazione*, sull'*Analogia*.

La domanda sulla quale abbiamo poco sopra fissato l'attenzione tende alla mobilitazione di tutte le nostre conoscenze già acquisite (v. *Progressi e compimento*, 1). La parte essenziale della nostra cultura matematica si concentra sotto forma di teoremi precedentemente dimostrati. Di qui l'utilità della domanda: *Si conosce un teorema che potrebbe essere utile?* Questo quesito può rivelarsi particolarmente efficace quando si abbia dinanzi un "problema di dimostrazione", ossia quando si debba esaminare la validità di un certo teorema.

Si disegni una figura. Si introduca un conveniente sistema di notazioni. — Rimandiamo il lettore rispettivamente a *Figura* e *Notazione*.

Si esaminino le proprie previsioni. — Le previsioni avanzate possono essere conformi al vero; ma è cosa stolta accettare una brillante congettura come una verità dimostrata: cosí spesso si comportano le popolazioni primitive. Le previsioni avanzate possono essere assurde; ma sarebbe cosa stolta anche scartare a priori una congettura allettante; cosí, alle volte, si comportano le persone pedanti. Previsioni di un certo tipo meritano di essere esaminate e prese in seria considerazione: precisamente quelle che si affacciano alla nostra mente quando siamo tutti intenti alla risoluzione di un problema che abbiamo compreso perfettamente e al quale siamo sinceramente interessati. Di solito, simili congetture contengono almeno un frammento di verità, anche se esse, naturalmente, spesso non sono in grado di condurre alla completa verità. Tuttavia è probabile che questa si possa ricavare senza incertezze attraverso un oculato esame proprio di tali previsioni.

Molto sovente anche congetture sostanzialmente scorrette si sono rivelate utili per ispirare una previsione piú rigorosa.

In fondo, nessuna idea è malvagia, a meno che noi siamo privi di senso critico. Ciò che davvero è una cosa pessima è non avere alcuna idea!

1. *Non cosí!* Ecco una favoletta su un certo signor John Jones. Il signor Jones lavora in un ufficio; aveva sperato in un piccolo

aumento di stipendio, ma la sua speranza, come avviene spesso delle speranze umane, è stata delusa: gli stipendi di alcuni colleghi sono stati aumentati, ma non quello del signor Jones che pertanto non sa rassegnarsi. Tormentandosi a dismisura, egli comincia a sospettare che il responsabile del mancato aumento del suo stipendio sia il direttore Brown.

Non si può biasimare troppo severamente il signor Jones per albergare nel suo animo tale sospetto; contro il direttore Brown pesano effettivamente alcuni indizi. Al signor Jones si può ascrivere a colpa il fatto che egli, dopo aver concepito questo sospetto, si rifiuti ora di accettare ogni indizio atto a provargli che è in errore e si accanisca nella convinzione che il direttore Brown gli sia ostile. Cosí, con il suo sciocco comportamento, Jones finirà per inimicarsi veramente il suo superiore.

Il guaio è che il signor John Jones si comporta proprio come la maggior parte di noi. Egli non cambia mai le sue convinzioni piú forti; muta spesso e con la massima facilità quelle piú superficiali, ma non nutre mai alcun dubbio circa le sue congetture, fondate oppure no, fin tanto che egli crede in loro. Il signor Jones non ammette che le sue congetture possano essere false, non le discute, non le esamina affatto sottoponendole ad una critica spassionata; potremmo dire che, se egli ne conoscesse il significato, proverebbe un particolarissimo disgusto per l'analisi critica.

In fondo, il signor Jones è un uomo molto occupato, deve compiere molti doveri sia in ufficio sia a casa, ha pochissimo tempo per le ricerche e le analisi introspettive. Potrebbe, al massimo, esaminare un numero limitato delle sue convinzioni e... perché mai dovrebbe dubitare di una di esse se poi non ha il tempo di analizzare il suo primo dubbio?

Ebbene non imitiamo il signor Jones! Non permettiamo che il sospetto, le congetture, le previsioni si radichino definitivamente in noi! In ogni campo di indagine speculativa, anche l'idea migliore risulta deprezzata da un'accettazione passiva, mentre risulta valorizzata da un esame critico.

2. *Un esempio matematico.* Fra tutti i quadrilateri di dato perimetro, determinare quello di area massima.

Qual è l'incognita? Un quadrilatero.

Quali sono i dati? Il perimetro del quadrilatero.

Qual è la condizione? Il quadrilatero richiesto deve avere area maggiore di quella di qualunque altro quadrilatero avente eguale perimetro.

Si tratta di un problema di natura molto diversa da quella dei consueti problemi di geometria elementare e quindi è perfettamente logico iniziare con qualche congettura.

Quale quadrilatero potrebbe essere quello di area massima? Quale congettura potrebbe scaturire spontaneamente? Potremmo sapere che, fra tutte le figure piane di assegnato perimetro, il cerchio è quella di area massima; ma potremmo anche nutrire qualche sospetto circa la validità di tale affermazione. Ora, quale quadrilatero assomiglia di piú al cerchio? Quale quadrilatero presenta, come il cerchio, spiccate caratteristiche di simmetria?

È molto spontaneo pensare subito al quadrato. Accettando questa previsione consapevolmente, dobbiamo renderci conto del suo significato. Dovremmo dimostrare che, fra tutti i quadrilateri di dato perimetro, il quadrato è quello di massima area. Se stabiliamo di analizzare questa proposizione, la situazione acquista un aspetto diverso. All'inizio si trattava di un "problema di determinazione"; dopo avere avanzata la precedente congettura, ci troviamo dinanzi un "problema di dimostrazione". Si tratta ora di dimostrare la validità o la falsità del teorema a cui siamo pervenuti.

Se non conosciamo alcun problema precedentemente risolto analogo al nostro attuale, il compito ci può sembrare veramente arduo. *Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo. Si riesce a risolvere almeno una parte del problema?* Può venire in mente che il quadrato, se gode di particolari privilegi rispetto agli altri quadrilateri, necessariamente sarà in una posizione privilegiata rispetto, in particolare, al rettangolo. Potremmo risolvere almeno una parte del problema, se riuscissimo a dimostrare che, fra tutti i rettangoli di dato perimetro, il quadrato è quello di area massima.

Questo teorema sembra piú accessibile del precedente; è chiaro che esso è, però, meno generale. Ad ogni modo, rendiamoci conto del suo significato; dobbiamo darne una dimostrazione precisa e rigorosa e quindi può essere conveniente ricorrere al simbolismo algebrico.

L'area di un rettangolo, di cui due lati consecutivi hanno, rispetto ad una prefissata unità di misura, misure a e b, vale ab.

La misura di un lato di un qualsiasi quadrato di egual perimetro è $\dfrac{a+b}{2}$; quindi l'area del medesimo quadrato vale

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Essa dovrebbe risultare maggiore di quella del rettangolo, ossia dovrebbe essere:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab.$$

Ciò è vero? La stessa diseguaglianza può essere scritta nella forma:

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab;$$

questa scrittura, inoltre, risulta equivalente a:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$

oppure a

$$(a-b)^2 > 0.$$

L'ultima diseguaglianza è senz'altro valida, a meno che non sia $a = b$, cioè che il rettangolo considerato non sia un quadrato.

Cosí non possiamo affermare di avere risolto il nostro problema, tuttavia abbiamo compiuto qualche progresso proprio esaminando rigorosamente la congettura iniziale.

3. *Un esempio non matematico.* In un gioco di parole crociate, si chiede di determinare una parola di cinque lettere, la cui definizione è: "Un'isola per gli scultori."

Qual è l'incognita? Una parola.

Quali sono i dati? La lunghezza della parola che deve essere di cinque lettere.

Qual è la condizione? Essa è espressa dalla definizione. Si deve trovare il nome di un'isola che, per ora, non risulta individuato.

Quindi dobbiamo meditare sulla definizione e, cosí facendo, la nostra attenzione viene attratta dall'ultima parte di essa: "... per gli scultori". *Si riesce a risolvere almeno una parte del problema?* A questo punto, è conveniente passare in rassegna tutte le cose che possono servire o presentare qualche interesse per uno scultore e, fra queste, esaminare in particolare quelle di cinque lettere. L'unica di queste che potrebbe costituire la soluzione certa sembra *creta.* Infatti *creta* è il nome dell'argilla usata dagli scultori ed anche quello proprio di un'isola dell'Egeo.

Si può verificare il risultato? Certo, osservando, per esempio, che il vocabolo ottenuto consente tutti gli incroci con le parole che provengono da altre definizioni assegnate e che hanno in comune con esso almeno una lettera.

Figure. — Le figure costituiscono non solo il fondamento dei problemi di geometria sintetica, ma anche un elemento ausiliario fondamentale in ogni problema, non necessariamente geometrico. Quindi ci sono due validissimi motivi per apprezzare il ruolo delle figure nella risoluzione dei problemi.

1. La considerazione di una figura è necessaria quando si debba risolvere un problema di geometria. Tale figura può esistere solo in virtú della nostra facoltà immaginativa, oppure essere effettivamente disegnata su un foglio. Talvolta è utile pensare a una figura senza per altro tracciarla; ma è opportuno *disegnare una figura* quando si debbano esaminare vari dettagli, uno dopo l'altro. Infatti non è possibile fissare mentalmente l'attenzione sopra troppi particolari simultaneamente, mentre essi risultano tutti ben chiari in un disegno concreto. Un dettaglio tracciato con l'immaginazione può essere dimenticato con facilità; invece un dettaglio segnato su un foglio resta a rammentare considerazioni svolte precedentemente, evita un poco di fatica al risolutore quando sia necessario stabilire un legame fra i vari risultati parziali conseguiti.

2. Considereremo ora l'impiego delle figure nei problemi di costruzione.

In generale, lo studio accurato di un siffatto problema inizia con l'abbozzo di una figura sulla quale vengono disegnati i dati e l'incognita, tutti elementi che devono essere disposti in modo da soddisfare alla condizione espressa dall'enunciato del problema. Per comprendere a fondo il problema, è necessario considerare separatamente ciascun dato e ciascuna parte della condizione; poi è opportuno procedere al collegamento di tutte le parti suddette e alla considerazione della condizione come un tutto unico, tentando di individuare nello stesso tempo le varie connessioni esistenti in virtú dell'enunciato del medesimo esercizio assegnato. Soltanto un matematico d'eccezione sarebbe capace di destreggiarsi fra tutti questi elementi, separandoli e ricomponendoli fra loro, senza tracciare una figura effettiva.

D'altra parte, finché non si sia pervenuti alla soluzione del problema, resta sempre il dubbio se sia possibile disegnare una figura del tipo di quella richiesta. Si può soddisfare all'intera condizione del problema? Nessuno ha il diritto di affermare di sí prima di avere conseguito la soluzione definitiva; tuttavia si comincia con il supporre l'esistenza di una figura in cui l'incognita sia legata ai dati cosí come impone la condizione. Tracciando una figura siffatta, si potrebbe pensare di avere avanzata un'ipotesi non giustificata.

Non è cosí, invece; almeno, non necessariamente. Non costituisce un atto inconsulto considerare, mentre si sta studiando un problema, la *possibilità* dell'esistenza di un ente che soddisfi alla condizione imposta all'incognita e che presenti con i dati le relazioni volute; a patto, naturalmente, che non si confonda tale possibilità con una certezza. Un giudice non agisce in modo contrario alla legge quando, interrogando un imputato, considera l'eventualità che questi abbia commesso un certo crimine, purché egli non si affidi completamente a questa ipotesi. Matematici e giudici hanno il diritto di esaminare obiettivamente una possibilità, riservandosi di esprimere esplicitamente la loro opinione quando siano pervenuti a conclusioni sicure in virtú di indagini rigorose.

Il metodo di iniziare la considerazione di un problema di costruzione disegnando uno schizzo, che si suppone soddisfare alla condizione, risale ai geometri dell'antica Grecia. Esso è schematizzato dalla breve ed un poco confusa proposizione di Pappo: *Si supponga che ciò che deve essere trovato sia già stato ottenuto.* Il consiglio che segue è meno laconico e piú chiaro: *Si disegni un'ipotetica figura che si suppone soddisfi completamente alla condizione del problema.*

Si tratta di un accorgimento relativo ai problemi di costruzione geometrici, ma in realtà non è necessariamente limitato a problemi di questo tipo particolare. Esso può essere generalizzato, in modo da riconoscerne l'efficacia anche per la risoluzione di ogni tipo di "problema di determinazione", cosí: *Si esamini l'ipotetica situazione nella quale si suppone sia completamente soddisfatta la condizione del problema.* Si veda a tale proposito *Pappo*, **6**.

3. Avanziamo ora qualche precisazione circa il tracciamento delle figure.

I) Le figure vanno disegnate con precisione, oppure in modo approssimativo? Con l'ausilio di particolari strumenti, oppure a mano libera?

Ciascuno dei suddetti disegni presenta dei vantaggi. Inizialmente le figure precise giocano in geometria il medesimo ruolo delle misurazioni precise in fisica; nella pratica, però, le figure precise sono molto meno importanti delle misurazioni precise, perché i teoremi di geometria hanno validità ben piú generale delle leggi di fisica. Tuttavia chi si accinge allo studio della geometria dovrebbe disegnare le figure con la massima precisione per apprestare alla sua conoscenza saldi fondamenti sperimentali; figure rigorose possono inoltre suggerire teoremi di geometria anche a specialisti di tale materia. Come ausilio ad un ragionamento, in genere si rivelano sufficienti schizzi eseguiti a mano libera, che richiedono pochissimo tempo. Naturalmente, la figura non dovrebbe mai apparire in manifesto contrasto con la realtà; rette che si suppongono tali non devono presentare ondulazioni e le circonferenze non assomigliare al contorno di una patata.

Una figura mal fatta può ispirare false congetture e false conclusioni, ma questo pericolo non è davvero tanto frequente come si potrebbe pensare e può essere evitato con diversi accorgimenti, per esempio cambiando la figura. Esso poi viene totalmente eliminato quando si concentri l'attenzione sui legami logici intercedenti fra i vari enti in gioco e si tenga presente sempre che la figura serve come ausilio, ma, per nessun motivo, come fondamento per i risultati che si conseguono; questi si basano esclusivamente sulle connessioni logiche intercedenti fra di essi. [Ciò è illustrato in modo molto chiaro e istruttivo da alcuni notissimi paradossi che abilmente sfruttano le inevitabili imprecisioni di certe configurazioni.]

II) È indispensabile che gli elementi stiano fra loro nei legami richiesti, ma è arbitrario l'ordine secondo cui essi sono disegnati. Tale ordine può dunque essere scelto nel modo che sembra piú conveniente. Per esempio, per illustrare il concetto della trisezione di un angolo, si possono disegnare due angoli, α e β, aventi in comune il primo lato e tali che $\alpha = 3\beta$. Partendo da un α arbitrario, non è possibile in generale costruire β usando soltanto la riga e il compasso. Quindi si scelga un angolo β opportunamente piccolo e del resto arbitrario; sarà molto facile disegnare allora l'angolo α.

III) La figura non dovrebbe mai riferirsi ad alcun caso particolare; precisamente, le diverse parti di essa non dovrebbero mostrare alcuna apparente relazione non enunciata dal problema. Segmenti non dovrebbero apparire eguali, né rette perpendicolari o parallele, se la condizione o i dati del problema non impongono che gli enti suddetti godano di queste proprietà. Allo stesso modo, se il problema non lo richiede, si eviti di disegnare triangoli isosceli o triangoli rettangoli. Ogni triangolo i cui angoli misurino 45°, 60° e 75° è tale da risultare il piú dissimile nella forma sia da un triangolo isoscele sia da un triangolo rettangolo.[5] Si tracci dunque un triangolo cosí, od uno non troppo diverso da questo, quando si debba considerare un triangolo "generico".

[5] Indichiamo con α, β e γ gli angoli di un triangolo; se $90° > \alpha > \beta > \gamma$, almeno una delle differenze $90° - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ risulta minore di 15° a meno che non si abbia: $\alpha = 75°$; $\beta = 60°$ e $\gamma = 45°$. Infatti:

$$\frac{3(90° - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15°.$$

IV) Per mettere in risalto i ruoli distinti delle diverse linee tracciate, si possono usare tratti di diverso spessore, punteggiature e tratteggi, colori diversi. Quando non si sia ancora ben convinti dell'utilità di introdurre una retta ausiliaria, si può disegnarla molto leggermente. Per distinguere i dati, si può usare una matita rossa e matite di altri colori per mettere in evidenza gli elementi piú importanti, come due triangoli simili, ecc.

V) Allo scopo di schematizzare un solido, è conveniente ricorrere a modelli tridimensionali o è meglio disegnare sopra un foglio di carta o sulla lavagna?

I modelli tridimensionali in effetti sono molto efficaci, ma, in generale, difficili da costruire e costosi. Quindi, di solito, ci si accontenta di disegni, sia pure spesso notevolmente complessi, che si eseguono con cura soprattutto quando si esige che essi risultino chiari. È opportuno che i principianti si ingegnino a costruire da soli qualche modello in cartoncino. Si rivela di una certa utilità assumere come modelli di enti geometrici oggetti dell'ambiente che ci circonda nella vita di ogni giorno. Cosí una scatola, un mattone, un'aula, possono essere scelti come rappresentazione di un parallelepipedo rettangolo; una matita come quella di un cilindro circolare; un paralume come quella di un tronco di cono circolare retto; ecc.

4. Le figure disegnate sopra un foglio sono facili da riprodurre, semplici da riconoscere e facilmente ritenibili dalla memoria. Le figure piane ci sono particolarmente familiari e i problemi in cui esse intervengono particolarmente accessibili. Si possono trarre dei vantaggi da tale circostanza e sfruttare l'abilità con cui tutti noi trattiamo le suddette figure per dominare anche oggetti estranei alla geometria; ciò ogni qual volta si sappia individuare per tali oggetti una conveniente rappresentazione geometrica.

Infatti la rappresentazione geometrica, i grafici e i diagrammi di ogni tipo sono impiegati in tutte le scienze e non solo in fisica, in chimica e nelle scienze naturali, ma anche nelle scienze economiche e persino in psicologia. Con l'ausilio di qualche opportuna rappresentazione geometrica, si tenta di esprimere qualunque concetto in linguaggio di figure e di ricondurre problemi di ogni genere a problemi di geometria.

Dovendo risolvere un qualsivoglia problema di geometria, ma non necessariamente di geometria, ci si sforzi dunque di disegnare sempre una figura. Pervenire ad una limpida rappresentazione geometrica di esso potrebbe veramente costituire un primo notevole passo innanzi verso la soluzione.

Generalizzazione. — Dicesi *generalizzazione* il passaggio dalla considerazione di un ente a quella di un insieme cui appartiene l'ente in esame, oppure il passaggio da un determinato insieme di enti a uno piú ampio che contenga il primo.

1. Se, per caso, ci imbattiamo nella somma

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100,$$

possiamo notare che essa può essere scritta nella forma particolare

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Allora è spontaneo chiedersi se avviene spesso che la somma dei cubi di numeri successivi della serie naturale, ossia una somma del tipo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3,$$

sia eguale al quadrato di un numero. Questa domanda è, di per se stessa, una generalizzazione; anzi si tratta di una generalizzazione importante che conduce da un'osservazione ad una notevole legge generale. In matematica, in fisica, nelle scienze naturali, molti risultati furono conseguiti proprio attraverso delle felici generalizzazioni (v. *Induzione e induzione matematica*).

2. La generalizzazione si rivela molto utile nella risoluzione dei problemi. Si consideri il seguente problema di geometria solida: "Sono dati in posizione una retta e un ottaedro regolare. Determinare un piano, passante per la retta assegnata, che tagli l'ottaedro in due parti di eguale volume." Il problema sembra piuttosto difficile, eppure è sufficiente una minima conoscenza della forma di un ottaedro regolare a suggerire il seguente problema piú generale: "Sono dati in posizione una retta e *un solido dotato di un centro di simmetria.* Determinare un piano, passante per la retta assegnata, che tagli il solido in due parti di eguale volume." Il piano richiesto contiene, ovviamente, il centro di simmetria del solido e quindi esso è completamente individuato da questo punto e dalla retta data. Poiché l'ottaedro regolare ammette un centro di simmetria, il problema iniziale è cosí risolto.

Il lettore non potrà fare a meno di osservare che il secondo problema è molto piú generale del primo e, tuttavia, piú semplice da risolvere. Infatti, nella risoluzione del primo problema, la maggiore difficoltà consiste nell'*inventare il secondo problema*, passaggio che consente di chiarire il ruolo del centro di simmetria; pertanto, fra le varie proprietà dell'ottaedro regolare, si fissa l'attenzione proprio su quella la cui considerazione è essenziale ai fini della risoluzione del problema iniziale, ossia sulla circostanza che il solido in questione ammette un centro di simmetria.

Un problema piú generale può essere piú facile da risolvere. Ciò sembra un paradosso, ma l'esempio di poco fa dovrebbe avere dissipato ogni incredulità in proposito. La maggiore difficoltà nella risoluzione del problema particolare consisteva nella scoperta del problema generale connesso con quello. Una volta trovato quest'ultimo, resta ben poco da fare. Cosí, nel nostro caso, la risoluzione del problema piú ampio è soltanto un'esigua parte di quella del problema iniziale.

Si legga anche *Paradosso dell'inventore.*

3. "Calcolare il volume di un tronco di piramide a base quadrata, quando si conosca che lo spigolo della base maggiore, quello della base minore e l'altezza del tronco misurano rispettivamente 10 cm, 5 cm e 6 cm." Se, al posto dei numeri 10, 5 e 6, sostituiamo ordinatamente le lettere a, b e h, operiamo una generalizzazione. Si perviene infatti a un problema piú generale che può essere enunciato cosí: "Calcolare il volume di un tronco di piramide a base quadrata, quando si conosca che lo spigolo della base maggiore, quello della base minore e l'altezza del tronco misurano rispettivamente a cm, b cm e h cm." Una generalizzazione siffatta può essere molto utile. Passando da un "problema numerico" ad un "problema letterale", si apre la via a nuovi procedimenti; i dati possono essere modificati e quindi i risultati divengono suscettibili di diverse verifiche (v. *Si può verificare il risultato?*, 2 e *Variazione del problema*, 4).

Questo problema è già noto? — Può accadere di avere già risolto il problema, oppure di averne avuto qualche conoscenza anteriore, oppure di conoscere un problema molto simile ad esso. Sono queste eventualità che non si dovrebbero trascurare. Si cerchi sempre di ricordare le esperienze trascorse. *Questo problema è già noto? Oppure lo stesso problema si è già presentato sotto un aspetto leggermente diverso?* Anche se le risposte sono negative, proprio da tali domande può prendere avvio il meccanismo di mobilitazione di tutte le conoscenze già acquisite che possono rivelarsi utili.

La domanda posta come titolo al presente articoletto spesso è impiegata in un senso piú lato. Per condurre a termine la risoluzione, dobbiamo ricavare dalla nostra memoria nozioni fondamentali, risvegliare i concetti opportuni che giacciono assopiti nel se-no del nostro sapere (v. *Progressi e compimento*). Ma, naturalmente, non possiamo sapere a priori quali siano le informazioni che ci saranno piú convenienti; tuttavia esistono alcune probabilità che è bene non trascurare. Cosí, per esempio, ogni aspetto del problema attuale che abbia avuto una parte essenziale nella risoluzione di qualche altro problema può rivelarsi di nuovo importante. Quindi ci si sforzi di distinguere ciascun aspetto del problema da risolvere che abbia qualche probabilità di ricoprire un ruolo fondamentale. Qual è? Lo si è già considerato? *È già noto?*

Ecco un problema connesso con quello proposto e risolto precedentemente. — Si tratta di una felice combinazione; un problema la cui soluzione sia nota e che risulti connesso con quello proposto è senza dubbio sempre ben accetto. Ed esso risulta ancora piú gradito se il legame che presenta con quello in esame è molto profondo e la sua risoluzione non è troppo laboriosa. C'è una forte probabilità che un problema siffatto si riveli estremamente utile per la risoluzione di quello ancora insoluto.

La circostanza che ci proponiamo qui di esaminare è caratteristica e notevole. Per descriverla chiaramente, confrontiamola con quella in cui veniamo a trovarci quando stiamo considerando un problema ausiliario. In entrambi i casi, nostro intento è risolvere un certo problema *A* e ricorriamo pertanto ad un altro problema *B* nella speranza di poterne ricavare qualche vantaggio per la risoluzione del primo. La differenza consiste esclusivamente nella nostra posizione rispetto a *B*. Qui siamo riusciti a ricordare un problema *B* risolto precedentemente, ma che non sappiamo ancora come sfruttare. Là inventiamo un nuovo problema *B* che sappiamo (o, almeno, intuiamo come) usare, ma che non abbiamo ancora risolto. Le difficoltà in cui, in ogni caso, ci troviamo a causa di *B* caratterizzano tutte le differenze fra le due situazioni. Una volta superate tali difficoltà, *B* può essere impiegato allo stesso modo in entrambe le circostanze; possiamo sfruttarne il risultato, oppure il procedimento (come è stato illustrato in *Problemi ausiliari*, 3), oppure, se la fortuna ci assiste, sia il risultato sia il procedimento. Nella situazione qui considerata, è nota la risoluzione di *B*, ma non si sa come essa possa essere utilizzata. Quindi ci si chieda: *È possibile sfruttarlo? Si può fare uso del suo risultato? Si può fare uso del suo metodo?*

Il desiderio di impiegare un determinato problema risolto precedentemente influenza, in un certo senso, la visione che si ha di un problema proposto. Nel tentativo di collegare i due problemi, quello attuale e quello ormai risolto, si introducono nel nuovo problema elementi corrispondenti ai particolari elementi caratteristici dell'altro. Per esempio, si debba determinare la sfera circoscritta a un dato tetraedro regolare. Si tratta di un problema di geometria solida. Ci si può rammentare di avere già risolto l'analogo problema piano relativo alla costruzione della circonferenza circoscritta a un dato triangolo, ricorrendo all'intersezione delle tre bisettrici degli angoli di tale poligono. È logico tentare di introdurre nell'attuale problema enti analoghi a queste rette. Cosí, quali elementi ausiliari ad esse corrispondenti, vengono considerati i piani bisettori degli angoli solidi del tetraedro. Dopo di ciò, si può facilmente procedere nella risoluzione del problema di geometria solida, seguendo passaggio per passaggio quella dell'analogo problema di geometria piana.

L'esempio precedente è tipico. La considerazione di un problema connesso con quello proposto e risolto precedentemente conduce all'introduzione di elementi ausiliari e l'introduzione di convenienti elementi ausiliari consente di fare uso del problema connesso con quello assegnato con pieno vantaggio per la risoluzione di quello attuale. In realtà, si mira a questo preciso scopo quando, ragionando circa il possibile impiego di un problema connesso con uno da risolvere e già noto, ci si chiede: *Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?*

Ecco un teorema connesso con quello proposto e dimostrato precedentemente. La versione delle considerazioni esposte in questo articoletto quando si abbia a che fare con un "problema di dimostrazione" invece che con un "problema di determinazione" è stata chiaramente illustrata nel paragrafo 19.

Euristica. — *Euristica*, od *euretica*, od *ars inveniendi*, era il nome che contrassegnava un certo tipo di studio, in verità ben circoscritto, caratteristico della logica, o della filosofia, o della psicologia; si trattava di una scienza spesso vaga, talvolta presentata molto minuziosamente e tanto apprezzata anticamente quanto oggi è trascurata. Scopo dell'euristica è lo studio dei metodi e delle leggi di invenzione e di scoperta. Qualche traccia di essa può essere ritrovata negli scritti dei primi commentatori di Euclide; a tale proposito, esiste un passo particolarmente interessante dovuto a *Pappo*. I tentativi piú famosi di conferire all'euristica assetto sistematico risalgono a *Descartes* e a *Leibnitz*, che seppero essere contemporaneamente matematici e filosofi. A *Bernard Bolzano* si deve un insigne saggio di euristica. Questo volumetto si propone di far rivivere l'euristica in forma semplice e moderna (v. *Euristica moderna*).

L'aggettivo *euristico* significa "utile per la scoperta".

Ragionamento euristico. — È tale ogni argomentazione che non pretenda di essere né definitiva né rigorosa, ma si presenti semplicemente come provvisoria e plausibile, con il solo scopo di scoprire la risoluzione di un determinato problema. Spesso si è costretti a ricorrere a ragionamenti euristici. Soltanto il conseguimento della soluzione completa può dare la certezza assoluta; ma, prima di raggiungere questa meravigliosa certezza, sovente ci si deve accontentare di congetture piú o meno soddisfacenti. Può essere necessario avanzare delle previsioni per ottenere il successo finale. I ragionamenti euristici ci aiutano ad edificare una dimostrazione rigorosa allo stesso modo delle impalcature nella costruzione di un edificio.

Si veda anche l'articolo *Sintomi di progresso.* Spesso un ragionamento euristico è basato sull'induzione o sull'analogia (v. *Induzione e induzione matematica* e *Analogia*, 8, 9, 10).[6]

Il ragionamento euristico sostanzialmente è ottimo. Ciò che si rivela disastroso è mescolare un ragionamento siffatto con una dimostrazione rigorosa e peggio ancora è propinare un ragionamento euristico come una dimostrazione rigorosa.

Gli insegnanti di certe materie, e soprattutto quelli di calcolo infinitesimale nelle facoltà di ingegneria e di fisica, sarebbero fortemente agevolati se l'essenza del ragionamento euristico fosse meglio compresa, se fossero chiaramente messi in luce sia i suoi vantaggi sia i limiti entro cui esso può essere applicato e se i testi adottati nelle scuole presentassero esplicitamente le dimostrazioni fondate su questo tipo di argomentazione. Un ragionamento euristico presentato con cautela e sincerità può rivelarsi utile; esso può preparare ad un ragionamento rigoroso del quale, nella maggior parte dei casi, contiene implicitamente il seme. Ma proprio il ragionamento euristico può essere un'arma pericolosa se esposto in forma poco limpida, con evidente incertezza mista a vergogna ed arroganza. Si legga anche *Necessità delle dimostrazioni.*

Se non si riesce a risolvere il problema proposto, non ci si abbatta eccessivamente e ci si consoli con qualche successo piú facile

[6] Si veda pure l'articolo dell'autore in "American Mathematical Monthly", vol. 48, pp. 450-465.

da conseguire. *Si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con quello proposto*; cosí si riprenderà coraggio e si potrà affrontare, con rinnovata lena e maggiore competenza, il problema iniziale. Non si dimentichi che la superiorità dell'uomo si manifesta nel saper raggirare un ostacolo che non si sappia superare direttamente, ossia, in linguaggio matematico, nell'individuare qualche conveniente problema ausiliario quando quello proposto sembra insolubile.

Si sa inventare un problema analogo piú accessibile? Può avvenire che lo studente non riesca ad *inventare* un problema siffatto e neppure a *ricordare* qualcosa del genere; è sperabile che egli si sia già posto il quesito: *È noto un problema connesso con questo?*

Le altre domande elencate in quella parte dello schema che inizia esattamente con le parole del titolo del presente articoletto hanno uno scopo comune: la *Variazione del problema.* Ci sono altri accorgimenti per conseguire lo stesso fine; per esempio, la *Generalizzazione*, la *Particolarizzazione*, l'*Analogia* e altri metodi ancora che risultano in effetti aspetti diversi dei processi di *Scomporre e ricomporre.*

Induzione e induzione matematica. — L'induzione è quel processo logico che conduce alla scoperta di leggi generali a partire dall'osservazione e dalla combinazione di esempi particolari. Esso è usato in tutte le scienze e persino in matematica. Il metodo di induzione matematica, invece, è impiegato solo in matematica in modo sistematico, per dimostrare teoremi di un tipo caratteristico. È piuttosto imbarazzante la rassomiglianza dei nomi attribuiti a questi due processi, perché fra di essi intercede un legame logico irrilevante. Tuttavia si può notare qualche connessione pratica e spesso si ricorre simultaneamente all'uno e all'altro di essi. Illustreremo entrambi i processi mediante un unico esempio.

1. Supponiamo di osservare per caso che vale la seguente eguaglianza:

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100.$$

Riconoscendo che in essa figurano quadrati e cubi notevoli, si può scrivere la medesima espressione nella forma piú significativa:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Come mai avviene cosí? Accade spesso che una siffatta somma di numeri elevati a cubo risulti eguale a un numero elevato a quadrato?

Ponendoci tale domanda, ci comportiamo come il naturalista che, colpito da una pianta strana o da una strana configurazione geologica, risale alla visione di una situazione generale. Il nostro problema piú ampio si riferisce alla somma dei successivi cubi:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \quad + n^3,$$

essendo n un generico numero intero.

A tale somma ci ha condotti il "particolare" caso di $n = 4$.

Come possiamo interpretare la questione? Proprio come procederebbe un naturalista: esaminando altri casi particolari. I casi corrispondenti ad $n = 2$ ed $n = 3$ sono banali; quindi passiamo al caso di $n = 5$, dopo avere preso in considerazione, per maggiore precisione, anche quello di $n = 1$. Ordinando tutti questi casi, cosí come un geologo elenca i risultati delle sue indagini sopra un certo minerale, perveniamo alla seguente tabella:

$$\begin{array}{lrl}
1 & = 1 = & 1^2 \\
1 + 8 & = 9 = & 3^2 \\
1 + 8 + 27 & = 36 = & 6^2 \\
1 + 8 + 27 + 64 & = 100 = & 10^2 \\
1 + 8 + 27 + 64 + 125 & = 225 = & 15^2.
\end{array}$$

Non si può pensare che tutte le somme precedenti risultino eguali a numeri elevati a quadrato per semplice combinazione. In circostanze analoghe, un naturalista sarebbe indotto a ritenere che la legge generale, suggerita dagli esempi particolari considerati fino a questo punto, sia esatta; la legge generale è completamente dimostrata per induzione. Invece il matematico procede con maggiore cautela anche se, naturalmente, pensa allo stesso modo. Egli direbbe di ritenere, per induzione, fortemente probabile la validità del seguente teorema:

La somma dei cubi dei primi n *numeri della serie naturale è il quadrato di un numero.*

2. Alla congettura circa la validità di tale teorema quasi arcano siamo dunque giunti per induzione. Per quale motivo somme di numeri elevati a cubo risultano eguali a numeri elevati a quadrato? Questo è proprio quello che avviene.

Come si comporterebbe un naturalista in una situazione analoga? Egli sottoporrebbe ad un accurato esame la sua congettura e, a tale scopo, potrebbe seguire varie linee di investigazione. Potrebbe procedere procacciandosi ulteriori esempi per accrescere l'evidenza in modo sperimentale; se volessimo seguire questo metodo, dovremmo considerare i casi successivi, corrispondenti ad $n = 6$, 7,... Ma egli potrebbe anche sottoporre ad un altro esame, piú accurato, le circostanze la cui osservazione lo ha condotto ad avanzare quella previsione; dal loro confronto, per esempio, potrebbe scaturire qualche profonda connessione o ulteriori analogie. Cosí faremo noi.

Riprendiamo dunque in considerazione i casi di $n = 1, 2, 3, 4, 5$ riassunti nella precedente tabella. Perché tutte quelle somme risultano quadrati di numeri? Cosa possiamo dire intorno a tali quadrati? Le basi di questi risultano ordinatamente eguali a 1, 3, 6, 10, 15. Che significato hanno questi numeri? Si cela nella loro sequenza qualche regolarità significativa, qualche ulteriore analogia? Essi, comunque, non sembrano succedersi secondo una legge fissa. Anche la differenza fra due elementi successivi della loro serie è crescente, avendosi

$$3-1=2, \qquad 6-3=3, \qquad 10-6=4, \qquad 15-10=5.$$

Ma tali differenze sono manifestamente regolari! Esse mettono in luce una sorprendente analogia fra le basi dei quadrati risultanti, una straordinaria profonda regolarità della successione di numeri 1, 3, 6, 10, 15:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1+2 \\ 6 &= 1+2+3 \\ 10 &= 1+2+3+4 \\ 15 &= 1+2+3+4+5. \end{aligned}$$

Se tale regolarità è generale (e sarebbe difficile convincersi a priori del contrario!) il teorema dianzi enunciato è suscettibile di quest'altra formulazione piú precisa:

Per n = 1, 2, 3, ..., *si ha*:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

3. La legge ora stabilita è stata ricavata per induzione e il procedimento che ha condotto ad essa ci fornisce un'idea sull'induzione, che è necessariamente un metodo irreversibile e poco preciso, ma non certo disprezzabile. L'induzione permette di scoprire la regolarità e le connessioni attraverso osservazioni particolari; i suoi strumenti piú efficaci sono la generalizzazione, la particolarizzazione, l'analogia. La generalizzazione, in via di esperimento, na-

sce dallo sforzo di comprendere le circostanze che si impongono alla nostra attenzione ed è fondata sull'analogia, mentre è confermata da ulteriori esempi particolari.

Non esporremo altre considerazioni su questo argomento dell'induzione, intorno al quale i filosofi spesso hanno idee tanto contrastanti; ma non va taciuto che numerosi risultati di matematica furono conseguiti per induzione e dimostrati rigorosamente in un secondo tempo. La matematica esposta in forma rigorosa si presenta come una scienza sistematica deduttiva, ma, nel periodo della sua formazione, fu essenzialmente una scienza sperimentale induttiva.

4. In matematica, come in fisica, è lecito ricorrere all'osservazione e all'induzione per scoprire leggi generali. Ma c'è una differenza: in fisica non esiste alcuna autorità maggiore dell'osservazione e dell'induzione, mentre in matematica l'unica vera voce autorevole è quella di una dimostrazione rigorosa.

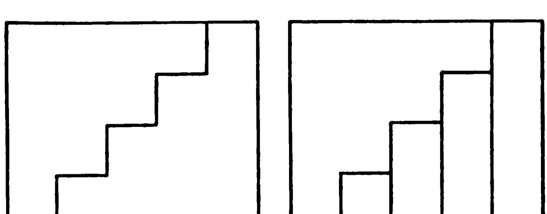
Dopo aver lavorato un poco per via sperimentale, è opportuno mutare punto di vista. Riassumiamo brevemente. Abbiamo trovato un risultato interessante, ma il procedimento che ci ha condotto ad esso è ipotetico, sperimentale, fondato su congetture, euristico; vediamo di conferire alla nostra conclusione una formulazione precisa, giustificata da una dimostrazione rigorosa.

Ci troviamo ora dinanzi ad un "problema di dimostrazione": si tratta di decidere se il risultato dianzi stabilito sia vero oppure falso (v. il precedente punto 2).

Possiamo intanto notare che

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Può essere che l'eguaglianza precedente sia già nota al lettore; in ogni caso, essa è suscettibile di una verifica immediata. Si consideri un rettangolo i cui lati, rispetto a una prefissata unità di misura, misurino rispettivamente n ed $n + 1$; lo si divida in due



a *b*

Fig. 18.

parti con una spezzata, come illustrato nella figura 18a relativa al caso di $n = 4$. Ciascuna delle due porzioni cosí ottenute ha area eguale ad $1 + 2 + ... + n$; per $n = 4$, tale area vale $1 + 2 + 3 + 4$, come risulta evidente dalla figura 18b. Poiché l'area della superficie dell'intero rettangolo vale $n(n + 1)$ ed è il doppio dell'area di ciascuna delle due parti suddette, l'eguaglianza è verificata.

Allora il risultato cui ci aveva condotto l'induzione può essere scritto nella forma:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$$

5. Anche se non abbiamo alcuna ispirazione sul metodo da seguire per dimostrare la validità della precedente conclusione, possiamo sempre almeno verificarla. Verifichiamo che essa vale per $n = 6$, che è il primo caso dianzi trascurato. Per questo particolare valore di n si ha:

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2;$$

eseguendo le operazioni indicate, notiamo che, per $n = 6$, il risultato è vero, perché i due membri della nostra eguaglianza assumono un medesimo valore che è precisamente 441.

Ma possiamo verificare la stessa formula in modo piú convincente. Essa è, con ogni probabilità, vera in generale, ossia vera per ogni valore di n. Conserva la sua validità quando si passi da un generico numero n al successivo $n + 1$? Se fosse cosí, allora, accanto alla formula precedente, potremmo scrivere anche questa:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = \left(\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}\right)^2.$$

Ricorriamo adesso a un semplice artificio. Sottraendo da quest'ultima scrittura la precedente, si ha:

$$(n + 1)^3 = \left(\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2.$$

Questa identità è facile da verificare. Infatti il secondo membro di essa può essere messo nella forma:

$$\left(\frac{n + 1}{2}\right)^2 [(n + 2)^2 - n^2] = \left(\frac{n + 1}{2}\right)^2 [n^2 + 4n + 4 - n^2] =$$

$$= \frac{(n + 1)^2}{4}(4n + 4) = (n + 1)^2(n + 1) = (n + 1)^3.$$

Il nostro risultato, ottenuto empiricamente, ha avuto una verifica di alto valore.

Vediamo ora di chiarire il significato di tale verifica. Senza dubbio abbiamo verificato che

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ma non sappiamo ancora se sia valida l'identità:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Tuttavia, *se* sapessimo che questa *è* vera, potremmo dedurre, sommando membro a membro le identità di cui abbiamo dianzi data una verifica che non lascia dubbi circa la loro validità, che è vera *anche* la seguente:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

ossia un'analoga eguaglianza relativa al numero intero successivo $n + 1$. Ora, in realtà, sappiamo che la nostra congettura vale per $n =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6. In virtú delle considerazioni esposte poco fa, essa, che è valida per $n = 6$, deve essere tale per $n = 7$; essendo valida per $n = 7$, deve essere tale per $n = 8$; essendo valida per $n = 8$, deve essere tale per $n = 9$ e cosí via. Essa è vera per ogni n, quindi è vera in generale.

6. La dimostrazione precedente può servire come schema in molti altri casi analoghi. Quali sono i suoi tratti caratteristici ed essenziali?

La proposizione di cui si deve dimostrare la validità deve essere enunciata precedentemente e in forma ben precisa.

Essa deve riferirsi ad un numero intero n.

Inoltre la medesima proposizione deve rivelarsi sufficientemente "esplicita" in modo da consentire la verifica del persistere della sua validità nel passaggio da n al numero intero successivo $n + 1$.

Se si riesce a verificare effettivamente questa circostanza, allora si può ricorrere all'esperienza, acquisita in virtú del precedente procedimento, e concludere che la proposizione in esame deve valere anche per $n + 1$, nell'ipotesi che essa valga per n. A questo punto è sufficiente sapere che l'enunciato è valido per $n = 1$; infatti di qui segue la sua validità per $n = 2$; da questa, quella per $n = 3$ e cosí via; procedendo da ciascun numero intero al successivo, si dimostra la proposizione in generale.

Questo procedimento è impiegato tanto spesso che gli si può dare un nome particolare. Noi potremmo chiamarlo "dimostrazione da n ad $n + 1$", o, piú semplicemente, "passaggio al successivo numero intero" Malauguratamente il vocabolo tecnico coniato per esso è "induzione matematica", che proviene da una circostanza fortuita. Il particolare enunciato che si deve dimostrare può avere qualunque origine e, dal punto di vista logico, non presenta alcun interesse conoscere quale sia questa fonte. Ora, in molti casi, come in quello da noi diffusamente riferito, la proposizione da dimostrare si presenta per induzione, è stata trovata sperimentalmente; cosí la dimostrazione appare come un complemento matematico all'induzione. Di qui il nome poco felice di "induzione matematica".

7. Veniamo ora a un'altra precisazione piuttosto sottile, ma importante per chiunque desideri eseguire le dimostrazioni da solo. Dianzi trovammo due affermazioni distinte per mezzo dell'osservazione e dell'induzione, una dopo l'altra, e precisamente la prima al punto 1 e la seconda al punto 2 del presente articolo; la seconda era piú precisa della prima. Fu proprio la considerazione della seconda proposizione a ispirarci la possibilità di verificare il passaggio da n ad $n + 1$ e a metterci in grado di trovare una dimostrazione "per induzione matematica" Limitandoci all'esame del primo enunciato ed ignorando la precisazione di cui esso diviene suscettibile in virtú del secondo, difficilmente saremmo riusciti a scoprire tale dimostrazione. Infatti la prima proposizione è meno precisa, meno "esplicita", meno "tangibile", meno facile da stabilire e da dimostrare della seconda. Il passaggio dalla prima alla seconda, dalla meno alla piú precisa, è stato in realtà un progresso determinante ai fini della dimostrazione finale.

Questa circostanza sembra paradossale. La seconda proposizione è piú forte; essa implica istantaneamente la prima, mentre da questa, piuttosto "nebulosa", difficilmente può dedursi l'altra cosí "netta" Eppure il teorema piú forte può essere dominato piú facilmente di quello piú debole; questo è il cosiddetto *Paradosso dell'inventore.*

Paradosso dell'inventore. — Il piano piú ambizioso può essere quello che ha maggiori probabilità di successo.

Ciò suona come un paradosso; eppure, passando da un problema ad un altro, si nota spesso che il nuovo problema, piú ambizioso del primo, può essere dominato piú facilmente di quest'ultimo. Rispondere a molte domande può essere piú agevole che dare la risposta ad una sola. Un teorema piú vasto può risultare piú semplice da dimostrare di uno relativo ad un caso particolare del primo, un problema piú generale piú accessibile di uno specifico.

Il paradosso poi svanisce quando si esaminino da vicino alcuni esempi (v. *Generalizzazione*, 2 e *Induzione e Induzione matematica*, 7). Il piano piú ambizioso può essere quello che ha maggiori probabilità di successo, purché esso non sia ispirato da vane pretese, ma si fondi sopra una visione concreta della situazione che trascenda i limiti del presente.

È possibile soddisfare alla condizione? — La condizione è sufficiente a determinare l'incognita? Oppure essa non è sufficiente? Oppure è sovrabbondante? Oppure è contraddittoria in termini?

Queste domande spesso si rivelano utili nello studio preliminare quando non esigono una risposta definitiva, ma soltanto una provvisoria, sovente appena ispirata da congetture. A tale proposito, si rileggano i paragrafi 8 e 18.

Si tratta di un ottimo metodo per prevedere ogni aspetto del risultato che si sta cercando. Avendo qualche idea su ciò che si può ottenere, si può scegliere con maggior sicurezza la direzione in cui avanzare. Ora, un'importante caratteristica di ogni problema consiste nel numero delle soluzioni che esso ammette. I problemi piú interessanti sono quelli che ammettono una, ed una sola, soluzione; siamo propensi a considerare i problemi che presentano una soluzione univocamente determinata come i soli esercizi "ragionevoli". Il problema in esame è, in questo senso ben preciso, "ragionevole"? Se si riesce a rispondere a questa domanda, sia pure in virtú di una plausibile congettura soltanto, allora aumenta l'interesse per il problema proposto e si lavora con piú entusiasmo e rendimento.

È un problema "ragionevole"? Si tratta di una domanda iniziale molto conveniente, *se* ad essa si può dare facilmente una risposta. Ma, se questa risposta non può essere avanzata con una certa immediatezza, può essere che la fatica si riduca ad una perdita di tempo non ricompensata dai benefici arrecati alla fine da tale conoscenza. È bene notare che considerazioni analoghe valgono per la domanda: *È possibile soddisfare alla condizione?* e per quelle dianzi riferite. È sempre opportuno porsi tali interrogativi, perché essi potrebbero ammettere risposte immediate e evidenti;

ma non si dedichi loro troppo tempo, se le risposte sembrano difficoltose da determinare o introvabili.

Nel caso di "problemi di dimostrazione", si hanno le domande corrispondenti: *È probabile che questa proposizione sia vera? Oppure è piú probabile che essa sia falsa?* Lo stesso modo in cui sono espressi tali interrogativi mostra chiaramente che ci si accontenta di risposte accettabili, ma provvisorie.

Leibnitz Gottfried Wilhelm (1646-1716). — Insigne matematico e filosofo, progettò di scrivere un'opera intitolata *Ars inveniendi*, ma non realizzò tale piano. Numerosi frammenti sparsi in altri suoi lavori mostrano, tuttavia, che Leibnitz concepí delle idee geniali circa questo argomento che fu oggetto di tante sue disquisizioni. Per esempio, egli scrisse: "Nulla è piú importante che vedere le sorgenti dell'invenzione che sono, a mio avviso, degne di un interesse ancora maggiore di quello dovuto all'invenzione stessa".

Lemma. — Dicesi *lemma* ogni teorema ausiliario. Si tratta di un vocabolo di origine greca che potrebbe essere tradotto piú letteralmente con "ciò che si assume come vero".

Si debba dimostrare un teorema, che diciamo *A*. Si giunge ad intuire un altro teorema, e sia *B*; se *B* fosse valido, allora forse il ricorso ad esso agevolerebbe la dimostrazione di *A*. Pertanto si assume provvisoriamente *B* come vero e, rimandandone la dimostrazione alla fine, si procede in quella di *A*. Supposto dunque che *B* sia valido, lo si sceglie come teorema ausiliario per il teorema iniziale *A*. Questo breve schema ci sembra abbastanza chiaro e atto a spiegare a fondo il significato del termine "lemma".

Si rifletta sull'incognita! — Un consiglio ben noto, corrispondente all'esortazione latina *respice finem*, che significa "mira allo scopo". Si ricordi sempre dove si vuole arrivare. Non si dimentichi il proprio bersaglio. Si pensi a ciò che si vuole ottenere. Non si perda di vista quello a cui si tende. Si mediti su quello che si sta facendo. *Si rifletta sull'incognita! Si rifletta sulla tesi!* Queste due traduzioni del motto *respice finem* sono particolarmente adatte ai problemi di matematica, per i "problemi di determinazione" e per i "problemi di dimostrazione" rispettivamente.

Concentrando la propria attenzione su ciò a cui si tende e impegnando tutta la propria volontà per conseguire lo scopo che ci si è prefissi, si individuano le vie e i mezzi per raggiungere il successo. Quali sono i mezzi per realizzare il proprio intento? Come riuscire ad ottenere un buon esito? Come pervenire a un risultato siffatto? Quali sono le cause di un tale risultato? Dove si è già notato un risultato simile? Cosa si fa, di solito, per raggiungere un risultato di questo genere? *E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga. E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente svolto avente lo stesso risultato finale o un risultato analogo.* Confrontiamo quest'ultimo suggerimento con quello implicito nella domanda: *È noto un problema connesso con questo?*

Il secondo consiglio è piú generico del primo. Due problemi che siano in qualche modo connessi fra loro hanno qualcosa in comune; essi possono riferirsi a certi enti o concetti che per entrambi risultano gli stessi, oppure ammettere i medesimi dati, oppure presentare identica una parte della condizione e cosí via. Il primo suggerimento insiste invece sopra una caratteristica particolare: i due problemi potrebbero avere la medesima incognita. Ossia, l'incognita potrebbe essere nei due problemi un elemento di uno stesso insieme di grandezze; per esempio, essere, nell'uno e nell'altro, la lunghezza di un segmento.

Rispetto al consiglio generale, in quello piú restrittivo si nota una limitazione precisa.

Innanzi tutto, esso ci evita qualche fatica nella comprensione del problema; non dobbiamo riguardare immediatamente ad esso come ad un tutto, ma fissare l'attenzione proprio solo sull'incognita. Il problema ci appare allora schematizzato in una forma del tipo:

"Conoscendo ... calcolare la lunghezza del segmento."

In secondo luogo, c'è una certa limitazione nella scelta. In generale, esistono troppi problemi connessi con uno proposto, aventi tutti qualche punto in comune con quest'ultimo. Ma, guardando solo all'incognita, l'arbitrarietà della scelta risulta fortemente ristretta; si prendono in considerazione solo quei problemi che presentino la stessa incognita. E, naturalmente, dei problemi aventi la stessa incognita, si considerano solo quelli piú elementari e piú noti.

2. Consideriamo dunque un problema del tipo:

"Conoscendo ... calcolare la lunghezza del segmento."

Il piú semplice e piú conosciuto problema di questo genere, riguarda i triangoli: "Conoscendo tre elementi fondamentali di un triangolo, calcolare la lunghezza di un lato." Ricordando questo problema, disponiamo di uno strumento che può essere conveniente: *Ecco un problema connesso con quello proposto e risolto precedentemente. È possibile sfruttarlo? Si può fare uso del suo risultato?* Per usare i ben noti risultati relativi ai triangoli, è necessario avere almeno un triangolo disegnato nella figura concernente il problema attuale. Esiste in essa almeno un triangolo? Oppure, si può introdurvene uno in modo da poter trarre profitto dai risultati già noti? *Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso a tali risultati?*

Esistono molti facili problemi la cui incognita è il lato di un triangolo, o la misura di esso rispetto ad una unità prefissata. (Essi differiscono fra loro per i dati: possono essere note la lunghezza di un lato e le ampiezze di due angoli, oppure le lunghezze di due lati e l'ampiezza di un angolo e, con riferimento a quest'ultimo caso, può essere diversa la posizione dell'angolo dato rispetto ai suddetti lati. Ovviamente tutti questi esercizi risultano particolarmente semplici quando il triangolo cui essi si riferiscono sia rettangolo.) Esaminando attentamente il problema proposto, si cerca di scoprire che tipo di triangolo sia conveniente introdurre, quale problema risolto in precedenza (e avente la stessa incognita di quello da risolvere) possa rivelarsi maggiormente utile nel caso in istudio.

Dopo avere introdotto un opportuno triangolo ausiliario, può accadere di non conoscere ancora tre suoi elementi. Tuttavia una conoscenza siffatta non è necessaria; se si prevede di poter determinare questi enti incogniti, si può essere certi di avere compiuto un notevole passo innanzi, di avere conseguito un piano per la risoluzione.

3. Il metodo schematizzato nei precedenti punti 1 e 2 è illustrato essenzialmente nel paragrafo 10 (l'esempio non risulta, forse, molto chiaro a causa della lentezza degli alunni). Non è difficile moltiplicare esempi siffatti, perché la risoluzione della maggior parte dei "problemi di determinazione" proposti di solito nelle classi inferiori può essere sempre iniziata ricorrendo al suggerimento: *E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga.*

Si devono riguardare problemi siffatti in modo schematico e, per prima cosa, si deve fissare l'attenzione sull'incognita:

1) Conoscendo . . . calcolare la lunghezza del segmento.
2) Conoscendo . . . calcolare l'ampiezza dell'angolo.
3) Conoscendo . . . calcolare il volume del tetraedro regolare.
4) Conoscendo . . . determinare un punto.

Basta possedere un po' d'esperienza di problemi di geometria elementare per riuscire a ricordare con prontezza qualche problema semplice e già noto, oppure che abbia la stessa incognita di quello assegnato. Se questo non è uno di quelli particolarmente familiari, è spontaneo cercare di fare uso di qualche nozione già acquisita e di sfruttare il risultato di esercizi semplici. Si tenta allora di introdurre nel problema proposto qualche ente ben noto che possa rivelarsi utile; e ciò segna già un buon inizio.

In ciascuno dei quattro casi sopra elencati è schematizzato un evidente piano di risoluzione, è contenuta una plausibile congettura circa gli ulteriori sviluppi della risoluzione.

1) L'incognita può essere riguardata come la lunghezza di un lato di qualche triangolo. Non resta che introdurre un triangolo conveniente di cui siano noti, o facilmente determinabili, tre elementi.

2) L'incognita può essere riguardata come l'ampiezza di un angolo di qualche triangolo. Non resta che introdurre un triangolo conveniente.

3) L'incognita può essere riguardata come la misura del volume di un tetraedro, ossia sarebbe immediatamente ricavabile se fossero note l'area della base e la misura dell'altezza di un tetraedro regolare. Non resta che calcolare l'area di una faccia e la misura dell'altezza ad essa corrispondente.

4) L'incognita potrebbe essere determinata come intersezione di due luoghi geometrici, ciascuno dei quali risulti o una circonferenza o una retta. Non resta che individuare tali luoghi in base alla condizione stessa del problema.

In tutti questi casi, il piano di risoluzione è suggerito da un problema, piú semplice di quello assegnato, avente la medesima incognita e dall'intento di usare il risultato oppure il metodo di un problema siffatto. L'esecuzione di un simile piano può, naturalmente, presentare delle difficoltà, ma sapere sempre almeno come iniziare è un grande vantaggio.

4. Nessun vantaggio di questo tipo, invece, quando non esista alcun problema risolto precedentemente che ammetta la stessa incognita di quello proposto. La risoluzione di quest'ultimo risulta allora molto piú difficile.

"Calcolare l'area della superficie di una sfera di dato raggio." Questo problema fu risolto da Archimede. È difficile che esista un problema piú semplice di quello ora enunciato ed avente la medesima incognita; senza dubbio, poi, nessun problema siffatto era in possesso di Archimede. Infatti la risoluzione che egli ne dette può ritenersi una delle piú notevoli conquiste nell'ambito della matematica.

"Calcolare l'area della superficie della sfera inscritta in un tetraedro di cui siano note le lunghezze degli spigoli." Noto il risultato di Archimede, non è necessario avere la genialità del famoso matematico siracusano per risolvere questo problema; basta esprimere il raggio della sfera inscritta per mezzo delle lunghezze dei sei spigoli del tetraedro. Non si tratta propriamente di un esercizio banale, ma comunque di un problema la cui difficoltà non può neppure lontanamente essere paragonata con quella del problema di Archimede.

L'essere facile, oppure difficile, della risoluzione di un problema può dipendere proprio esclusivamente dalla circostanza che sia noto, oppure no, un problema precedentemente risolto avente la medesima incognita.

5. Come abbiamo già detto, quando calcolò l'area della superficie sferica, Archimede non conosceva alcun problema già risolto che ammettesse la stessa incognita. Ma gli erano noti vari problemi, ai quali era stata precedentemente data una soluzione, aventi un'incognita analoga. Esistono superficie curve la cui area è molto piú semplice da calcolare di quella della sfera e superficie di questo genere erano ben conosciute ai tempi di Archimede: per esempio, le superficie laterali del cilindro circolare retto, del cono circolare retto e del tronco di un cono siffatto. Senza dubbio Archimede considerò attentamente questi problemi analoghi piú semplici. Infatti, nello sviluppo della risoluzione che gli si attribuisce, la sfera è approssimata mediante un solido costituito da due coni e da numerosi tronchi di cono (v. *Definizione*, 6).

Quando non si riesca a trovare un problema precedentemente risolto avente la stessa incognita di quello assegnato, se ne cerca uno avente un'incognita analoga. Problemi di quest'ultimo tipo risultano meno intimamente connessi con quello proposto dei problemi del tipo precedente e quindi sono, in generale, meno convenienti da usare, anche se talvolta si rivelano di notevole ausilio.

6. Aggiungiamo qualche osservazione circa i "problemi di dimostrazione"; esse sono analoghe a quelle svolte piú dettagliatamente qui sopra per i "problemi di determinazione".

Si debba dimostrare la validità (o la falsità) di un teorema esplicitamente enunciato. Ogni teorema precedentemente dimostrato, che si presenti in qualche modo connesso con il primo, può essere utile. Inoltre si può sperare di ricavare aiuto immediato da teoremi aventi la stessa tesi di quello assegnato. Quindi, *Si rifletta* *sulla tesi!*; ossia si consideri con particolare riguardo la tesi del teorema proposto. A tale fine, è opportuno enunciarlo in forma schematica; per esempio:

"Se..., allora gli angoli sono eguali."

Si concentri l'attenzione sulla tesi e *ci si sforzi di ricordare qualche teorema precedentemente dimostrato avente la stessa tesi oppure una tesi analoga.* In particolare, si penserà a teoremi di questo tipo piuttosto semplici e familiari.

Con riferimento al teorema enunciato poco fa, si possono trovare vari teoremi siffatti; per esempio, si può pensare al seguente: "Se due triangoli sono congruenti, allora gli angoli corrispondenti sono eguali." *Ecco un teorema connesso con quello proposto e precedentemente dimostrato. È possibile sfruttarlo? Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?*

Seguendo tali suggerimenti e tentando di valutare l'aiuto recato dal teorema ricordato, si può compilare un piano: cerchiamo di dimostrare l'eguaglianza degli angoli in questione attraverso la congruenza di triangoli. Vediamo che si deve introdurre una coppia di triangoli aventi quegli stessi angoli e si tratta di dimostrare la loro congruenza. Un simile piano, senza dubbio utilissimo per iniziare la dimostrazione richiesta, può condurre anche alla conclusione desiderata, come mostrammo nel paragrafo 19.

7. Riepiloghiamo, dunque! Richiamando problemi precedentemente risolti aventi la stessa incognita oppure un'incognita analoga (o teoremi aventi la stessa tesi oppure una tesi analoga) di quello proposto, si ha una forte probabilità di iniziare esattamente e di riuscire a concepire un piano di risoluzione (o di dimostrazione). Nei casi piú semplici, che sono i piú frequenti nelle classi inferiori, di solito è sufficiente il ricorso ai problemi piú elementari aventi la stessa incognita (o ai teoremi piú elementari aventi la stessa tesi). Un accorgimento ovvio e conforme al buon senso è quello di cercare di ricordare problemi con la stessa incognita (o teoremi con la stessa tesi); a tale proposito sarà opportuno che il lettore rammenti ciò che è stato scritto nel paragrafo 4. Eppure, è piuttosto strano, un accorgimento cosí immediato e spontaneo non è molto usato; l'autore è indotto persino a ritenere che, forse, esso non sia mai stato illustrato prima d'ora con sufficiente generalità e chiarezza. Ad ogni modo, né studenti né insegnanti possono permettersi di ignorare l'impiego specifico del suggerimento: *Si rifletta sull'incognita (o sulla tesi)! E ci si sforzi di ricordare qualche problema*

precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga (o qualche teorema precedentemente dimostrato avente la stessa tesi oppure una tesi analoga).

Euristica moderna. — L'euristica moderna consente la comprensione del processo di risoluzione dei problemi, soprattutto per quanto concerne le *operazioni mentali tipiche* di esso. Presenta diverse fonti di informazione, nessuna delle quali dovrebbe essere trascurata. Uno studio profondo di euristica dovrebbe tenere conto sia dei fondamenti logici sia di quelli psicologici di tale disciplina, non dimenticare ciò che matematici antichi, e anche recenti, come Pappo, Descartes, Leibnitz e Bolzano scrissero in merito, senza tuttavia disprezzare l'esperienza. L'esperienza di risoluzione di problemi e quella di insegnare ad altri a risolverli devono essere la base su cui l'euristica stessa viene edificata. In un saggio di questo genere, nessun tipo di problemi dovrebbe essere trascurato, mentre dovrebbero essere messi in risalto gli aspetti caratteristici dei metodi che consentono di dominare ogni specie di problemi; insomma, si dovrebbe aspirare a schemi generali, indipendenti dall'argomento di questo o quel problema particolare. Lo studio dell'euristica tende a fini "pratici"; una migliore comprensione delle operazioni mentali che piú si rivelano utili per la risoluzione dei problemi può recare ottimi risultati nell'insegnamento e soprattutto nell'insegnamento della matematica.

Questo volumetto è un primo tentativo di realizzare un simile programma. Ora analizzeremo in che modo le principali voci del nostro dizionario si inseriscono in tale progetto.

1. In realtà, il nostro schema è una lista di operazioni mentali molto utili per la risoluzione dei problemi; le domande e i suggerimenti che abbiamo presentato sono una traccia di queste medesime operazioni, alcune delle quali sono ispirate da considerazioni svolte nella seconda parte, mentre altre sono piú ampiamente discusse e illustrate già nella prima.

Per ulteriori osservazioni relative a particolari domande e suggerimenti dello schema, il lettore può rivolgersi ai quindici articoli del *Compendio* aventi come titolo rispettivamente le quindici frasi iniziali dei punti fondamentali dell'elenco: *Qual è l'incognita? È possibile soddisfare alla condizione? Si disegni una figura... Si può fare uso del risultato?* Il lettore, che desideri qualche informazione circa un particolare termine dello schema, fissi l'attenzione sulle prime parole delle righe che si riferiscono ad esso e poi cerchi quell'articolo del *Compendio* che ha per titolo quelle medesime parole. Per esempio, il suggerimento *Si ricorra alle definizioni* è contenuto in quel punto dello schema che inizia con la domanda: *Si può enunciare il problema in altra forma?* Sotto questo stesso titolo il lettore può trovare un riferimento al termine *Definizione*, in corrispondenza del quale sono presentate una spiegazione e una illustrazione del suggerimento considerato.

2. Il processo di risoluzione dei problemi è piuttosto complesso e presenta numerosi aspetti distinti. I dodici principali articoletti del nostro *Compendio* studiano alcuni di questi aspetti abbastanza minuziosamente; richiameremo qui i loro titoli.

Quando ci si applichi intensamente, si diviene molto sensibili ai progressi del proprio operato; un successo rapido produce una specie di esaltazione, mentre un procedere lento deprime. Durante la risoluzione dei problemi, cos'è essenziale ai fini dei *Progressi e compimento?* L'articolo dedicato a questa domanda è spesso citato anche in altre parti del *Compendio* e dovrebbe essere letto con una certa sollecitudine.

Nel tentativo di risolvere un problema, si considerano ad uno ad uno i vari aspetti di esso e lo si rimugina a lungo nella mente; la *Variazione del problema* è essenziale in questa fase. Un problema può essere variato mediante il processo di *Scomporre e ricomporre* i suoi elementi, oppure il ricorso alla *Definizione* di alcuni di questi, oppure l'appello ai metodi efficacissimi di *Generalizzazione* ed *Analogia.* Naturalmente la variazione del problema può implicare l'introduzione di *Elementi ausiliari*, oppure la scoperta di un *Problema ausiliario* piú accessibile.

Abbiamo sempre accuratamente distinto i problemi in due categorie, *Problemi di determinazione* e *Problemi di dimostrazione.* Il nostro schema si riferisce in modo particolare ai "problemi di determinazione"; al fine di renderlo applicabile anche ai "problemi di dimostrazione", si devono modificare leggermente alcune domande e alcuni suggerimenti.

In ogni tipo di problemi, ma soprattutto in quelli di matematica, spesso un ausilio indispensabile è costituito da un conveniente sistema di *Notazione* e dalle *Figure* geometriche.

3. Il processo di risoluzione dei problemi ha molteplici forme, alcune delle quali non sono affatto considerate in questo libro, mentre altre sono trattate solo piuttosto brevemente. Penso si possa trovare una giustificazione per l'esclusione, da una prima esposizione sommaria, di argomentazioni che sarebbero parse senza dubbio troppo sottili, oppure troppo sofisticate, oppure troppo specifiche, oppure troppo complesse.

Un *Ragionamento euristico* provvisorio, semplicemente plausibile, è importante per scoprire la risoluzione; ma esso non va confuso con una dimostrazione rigorosa. Si devono avanzare delle congetture, ma è pure necessario che *Si esaminino le proprie previsioni.* Una discussione sull'essenza dei ragionamenti euristici è l'argomento di *Sintomi di progresso*, ma essa potrebbe essere ampliata.

Sarebbe molto importante prendere in considerazione alcuni sviluppi logici, ma è forse piú saggio non presentare alcun articolo di carattere troppo particolare. Solo due sono i richiami ispirati massimamente ad aspetti psicologici; precisamente, in *Determinazione, speranza, successo* e in *Lavoro subcosciente.* C'è un'osservazione esplicita sulla psicologia degli animali (v. *Procedendo a ritroso*).

Si osservi che tutti i problemi, soprattutto i *Problemi pratici* e persino i *Giuochi d'enigmistica*, appartengono al campo d'applicazione dell'euristica. Insistiamo sulla circostanza che, a fondamento di ogni seria ricerca, stanno infallibili *Regole di scoperta.* L'euristica analizza e discute il comportamento della mente dell'uomo dinanzi ad un problema da risolvere; è probabile che un simile studio sia nato all'inizio della società umana e la quintessenza di antichi risultati acquisiti in tale modo sembra poter essere ritrovata nella *Saggezza dei proverbi.*

4. Abbiamo incluso qualche articolo relativo ad argomenti particolari e qualche altro di carattere generale, perché essi ed alcune loro parti potrebbero essere molto interessanti per uno studente o per un insegnante.

Certe voci, poi, trattano questioni sul metodo che talvolta risultano di notevole interesse nell'ambito della matematica elementare; cosí *Pappo*, *Alla fine* (già citato al punto 3), *Riduzione all'assurdo*, *Dimostrazione indiretta*, *Induzione e induzione matematica*, *Stabilire un'equazione*, *Verifica dimensionale*, *Necessità delle dimostrazioni.* Alcuni articoli sono stati scritti appositamente per gli insegnanti; cosí *Problemi di routine* e *Diagnosi*; altri sono dedicati agli studenti piú perspicaci; cosí *Il risolutore intelligente*, *Il lettore intelligente*, *Il futuro matematico.*

Si può ricordare che i dialoghi fra insegnante e studenti, riferiti nei paragrafi 8, 10, 18, 19, 20 e in vari articoli del *Compendio* si rivelano utili se presi a modello non solo dall'insegnante che cerca di guidare la sua scolaresca, ma anche da chiunque si sforzi di risolvere dei problemi da solo. Del resto non è fuori luogo in questo caso interpretare il ragionamento come un "dialogo silenzioso", come una specie di monologo. I suddetti colloqui mettono in risalto i progressi che si vanno compiendo verso la risoluzione; il risolutore, parlando con se stesso, può analogamente avvicinarsi alla meta.

5. Non abbiamo intenzione di elencare tutti gli altri titoli; accenneremo ancora soltanto quindi ad alcuni gruppi di articoli.

Ci sono articoli contenenti cenni sulla storia dell'argomento che stiamo trattando; cosí quelli intitolati *Descartes*, *Leibnitz*, *Bolzano*, *Euristica*, *Vocaboli, vecchi e nuovi* e *Pappo* (quest'ultimo è già citato al punto 4).

Qualche articolo spiega il significato di vocaboli tecnici: *Condizione*, *Corollario*, *Lemma*.

Altri servono solo come riferimento (e sono quelli contrassegnati, nell'indice, con un asterisco).

6. L'euristica tende alla generalità, ha come oggetto lo studio dei procedimenti che non dipendono da un argomento particolare, ma restano validi per ogni tipo di problemi. Tuttavia ciò che abbiamo esposto si riferisce quasi esclusivamente ai problemi di matematica elementare. Non si deve dimenticare che ciò costituisce una limitazione arbitraria che, si spera, non infirmi lo scopo di questa nostra esposizione. Infatti i problemi matematici elementari presentano tutte le situazioni che si possano desiderare e lo studio della loro risoluzione ha il vantaggio di essere straordinariamente semplice e interessante. Inoltre l'autore non ha mai trascurato del tutto problemi non di matematica, anche se ad essi è ricorso raramente, come esempi. Problemi di matematica superiore non sono mai stati qui enunciati esplicitamente, ma essi stanno alla base di questo lavoro. Il matematico specializzato, che abbia qualche interesse per tale studio, può facilmente trarre esempi dalla propria esperienza per rendere maggiormente significative le circostanze illustrate nel presente volume mediante esempi di carattere elementare.

7. L'autore desidera esprimere la sua gratitudine ad alcuni scienziati moderni non nominati nell'articolo *Euristica.* Si tratta del fisico e filosofo Ernst Mach, del matematico Jacques Hadamard, degli psicologi William James e Wolfgang Köhler. L'autore vuole pure nominare lo psicologo K. Duncker e il matematico F. Krauss nei cui lavori (pubblicati quando il presente volume era già ultimato e parzialmente pubblicato) ha notato qualche concordanza di esposizione.

Notazioni. — Volendo comprendere effettivamente l'utilità di una notazione opportunamente scelta e ben nota, si provi ad addizionare alcuni numeri non molto piccoli con la condizione di non poter usare la consueta rappresentazione con cifre arabiche, bensí quella posizionale degli antichi romani. Siano, per esempio, addendi: MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

È difficile non valutare a fondo l'importanza delle notazioni matematiche. Oggi siamo molto avvantaggiati, disponendo della scrittura in forma decimale dei numeri, rispetto agli antichi che non possedevano alcun procedimento cosí agevole. Un qualunque studente di scuola media superiore del nostro tempo ha dimestichezza con il simbolismo algebrico, la geometria analitica, il calcolo differenziale e integrale; su un matematico dell'antica Grecia, egli ha un immenso vantaggio per quanto concerne la risoluzione di problemi relativi ad aree o volumi del tipo di quelli con cui si cimentò il genio di Archimede.

1. Linguaggio e pensiero sono intimamente connessi, l'uso della parola essendo di ausilio alla mente. Alcuni filosofi e psicologi affermarono anzi che l'uso delle parole è indispensabile per quello della ragione.

Certo quest'ultima affermazione ci appare un poco esagerata. Avendo sia pure soltanto una limitata esperienza di seri studi di matematica, si riconosce che si può proseguire un ragionamento anche senza pronunciare verbo, proprio riflettendo su figure geometriche od operando su simboli algebrici. Le figure e i simboli sono strettamente legati al ragionamento matematico e la mente è notevolmente aiutata dal ricorso ad essi. Si potrebbe trasformare l'asserzione precedente, dovuta a filosofi e psicologi e forse troppo categorica, sostituendo il vocabolo "parole" con quelli di "cifre" oppure "simboli" ed affermare, quindi, che l'*uso dei simboli è indispensabile per quello della ragione.*

Ad ogni modo, l'impiego dei simboli matematici è analogo a quello delle parole. Un sistema di notazioni matematiche può essere riguardato come una specie di linguaggio, *une langue bien faite*, un linguaggio che ben si addice al suo scopo, conciso e rigoroso, con regole prive di eccezioni a differenza di quello della grammatica ordinaria.

Accettando questo punto di vista, *Stabilire un'equazione* risulta un processo di traduzione, traduzione dal linguaggio ordinario nel linguaggio simbolico proprio della matematica.

2. Certi simboli matematici, come $+$, —, $=$, e molti altri, hanno un significato ormai fissato dall'uso comune; ma vi sono simboli, come le lettere minuscole e maiuscole dell'alfabeto latino e

di quello greco, che assumono significati diversi da un problema a un altro. Dovendo affrontare un problema, è necessario introdurre alcuni simboli; si deve *introdurre un conveniente sistema di notazioni*. Qualcosa di analogo si verifica nell'impiego del linguaggio comune. In diversi contesti, si usano molti vocaboli con distinti significati; quando si richiede la massima precisione, però, le parole vanno scelte con particolare cura.

Nella risoluzione di un problema, la scelta delle notazioni costituisce un passaggio importante. Il tempo dedicato a tale scelta può essere ripagato generosamente dalla maggiore speditezza e chiarezza con cui si procede in seguito. Inoltre, scegliendo con attenzione le notazioni piú opportune, si è costretti a considerare accuratamente tutti gli elementi del problema suscettibili di essere cosí individuati e ciò reca un contributo essenziale alla comprensione del problema.

3. Una notazione conveniente deve essere breve, significativa, facile da ricordare e tale da non generare confusione; essa dovrebbe essere suscettibile di ulteriori precisazioni dalle quali poter dedurre informazioni utili; l'ordine di introduzione dei simboli ed i legami intercedenti fra questi dovrebbero riflettere l'ordine ed i legami intercedenti rispettivamente fra gli enti che essi individuano.

4. Innanzitutto i simboli *non devono generare confusione*. È inammissibile che una stessa notazione stia ad indicare, in un medesimo problema, due enti distinti. Nella risoluzione di un problema, se si indica con a una certa grandezza, non si può denotare con la stessa lettera alcun altro ente relativo al medesimo esercizio. Naturalmente, in un problema diverso, si può attribuire ad a un diverso significato.

Mentre non è lecito adottare una stessa notazione per enti distinti, è lecito adottare diversi simboli per uno stesso ente. Cosí il prodotto di a per b può essere scritto indifferentemente in una delle seguenti forme:

$$a \times b, \qquad a \cdot b, \qquad ab.$$

Talvolta è vantaggioso ricorrere a due o piú simboli diversi per un medesimo ente, ma simboli cosí esigono particolare attenzione. Di solito, è conveniente usare una, ed una sola, notazione per ciascun ente e non si dovrebbero mai introdurre troppi simboli senza necessità.

5. Una notazione conveniente deve essere *facile da rammentare* e facile da riconoscere; il simbolo dovrebbe immediatamente ri-

chiamare la visione dell'ente corrispondente, cosí come l'ente quella del simbolo.

Un accorgimento semplicissimo per rendere le notazioni facilmente riconoscibili consiste nell'impiego delle *iniziali* come simboli. Per esempio, nel paragrafo 20, introducemmo le notazioni v, t e V rispettivamente per una misura di velocità, di intervallo di tempo e di volume. È ovvio che non sempre si possono impiegare le iniziali. Ci sono altri motivi che mirano a limitare la scelta dei simboli ed altri metodi per renderli facilmente riconoscibili; vogliamo ora parlare proprio di questo.

6. Un sistema di notazioni è non solo facilmente riconoscibile, ma anche particolarmente utile a tradurre il nostro pensiero, quando *l'ordine e la connessione dei simboli riflettano l'ordine e la connessione degli enti cui essi si riferiscono.* Qualche esempio illustrerà chiaramente questo concetto.

I) Per denotare enti vicini fra loro nella visione generale di un problema, si usano lettere vicine fra loro nell'alfabeto.

Cosí si introducono, di solito, le prime lettere dell'alfabeto, come a, b e c, in corrispondenza di quantità assegnate o di costanti e le ultime lettere dell'alfabeto, come x, y e z, in corrispondenza di quantità incognite o di variabili.

Per esempio, nel paragrafo 8 a, b e c denotano le misure delle lunghezze degli spigoli noti di un parallelepipedo rettangolo. In questo caso, le notazioni a, b, e c sono le piú convenienti e senz'altro piú agevoli delle lettere l, s e p, iniziali rispettivamente di "lunghezza", "spessore" e "profondità". Le tre quantità assegnate giocano uno stesso ruolo nel problema e ciò è messo in luce proprio dall'impiego di tre lettere successive dell'alfabeto. Inoltre, come abbiamo già detto, le prime lettere dell'alfabeto sono quelle usate piú comunemente per indicare quantità assegnate. In altri casi, se le misure dei tre segmenti noti si comportassero diversamente ai fini della risoluzione di un certo problema e fosse necessario avere sempre presente quali di essi siano orizzontali e quali verticali, allora sarebbe piú opportuno fare uso delle lettere l, s e p.

II) Per denotare enti di una stessa specie, si usano di solito lettere di uno stesso alfabeto; per enti di diverse specie, lettere di alfabeti diversi. Cosí, nella geometria piana comunemente si indicano:

i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come A, B, C,...;
le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino, come a, b, c,...;
gli angoli con le lettere minuscole dell'alfabeto greco, come α, β, γ...

Può accadere che due enti di diversa specie siano legati fra loro da una particolare connessione, importante per il problema che si sta trattando; in questo caso ad essi si può far corrispondere la stessa lettera di un medesimo alfabeto, minuscola per l'uno e maiuscola per l'altro; cioè a ed A, b e B, ecc. Un esempio ben noto è quello delle solite notazioni relative a un triangolo; come il lettore saprà, si indicano:

i vertici con A, B, C;
i lati con a, b, c;
gli angoli con α, β, γ.

È sottinteso che a è il lato opposto al vertice A e che α è l'angolo di vertice A.

III) Nel paragrafo 20, le lettere a, b, x, y, sono state scelte molto bene per mettere in risalto la natura degli enti corrispondenti ed i legami fra questi. Le notazioni a e b stanno ad indicare che le quantità cui esse si riferiscono sono costanti; x ed y denotano analogamente delle quantità variabili; nell'alfabeto, a, precede b ed x precede y: ciò suggerisce che a è legata a b da una relazione analoga a quella che intercede fra x ed y. Infatti a e x sono le misure delle lunghezze di due segmenti orizzontali, b e y quelle di due segmenti verticali e vale la relazione: $a : b = x : y$.

7. La scrittura

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG \text{ o triangolo } ABC \sim \text{ triangolo } EFG$$

indica di solito che i due triangoli in questione sono simili. Nei testi moderni, ad essa si attribuisce questo preciso significato: i due triangoli ABC ed EFG sono simili, i loro vertici corrispondendosi nell'ordine scritto (ossia ad A, B, C corrispondono ordinatamente E, F, G). In altri volumi, non si tiene conto di tale convenzione circa l'ordine; il lettore deve allora guardare la figura, o ricordare come è stata stabilita la similitudine in questione, per decidere esattamente circa la corrispondenza fra i vertici.

La notazione moderna è senza dubbio preferibile a quest'ultima, perché consente, fra l'altro, di trarre delle conclusioni *senza guardare la figura*. Cosí si possono dedurre le eguaglianze:

$$\angle A = \angle E \text{ o angolo di vertice } A = \text{ angolo di vertice } E$$
$$AB : BC = EF : FG,$$

ed altre relazioni di questo genere. Il simbolismo antico, in questo caso, dice molto meno e non permette di ricavare immediatamente deduzioni di tale tipo.

Una notazione piú significativa di un'altra può essere detta piú *ricca*. Il simbolismo moderno relativo alla similitudine fra triangoli è piú ricco di quello antico, riflette l'ordine e la connessione fra i vari enti in modo piú completo e quindi può essere origine di un maggior numero di deduzioni.

8. Un vocabolo può avere un *significato derivato*. Certe espressioni, in cui ricorre spesso una parola, in qualche modo completano il significato di questa, nel senso che aggiungono al suo significato primitivo delle sfumature: nasce cosí un significato nuovo, caratteristico. Quando scriviamo, di solito cerchiamo, fra tutti i vocaboli dotati in origine di uno stesso significato, quello che, in virtú del suo particolare significato derivato, ci sembra piú efficace ad esprimere ciò che vogliamo dire.

Qualcosa di analogo avviene per i simboli matematici, che pure possono acquistare una specie di nuovo significato, derivato dai particolari impieghi che si fanno di essi. Volendo scegliere il sistema di notazioni piú conveniente, bisogna tenere conto di questo fatto, che ci proponiamo ora di chiarire ulteriormente.

Alcune lettere hanno acquisito un significato ben determinato, tradizionale. Cosí, comunemente, e, sta ad indicare la base dei logaritmi naturali, i la radice quadrata di -1 (ossia l'unità immaginaria) e π il rapporto costante fra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro di un generico cerchio. La cosa migliore è riservare tali simboli ai suddetti enti. Se si adottasse una delle suddette notazioni per qualche altro ente, potrebbe verificarsi un'interferenza con il corrispondente significato convenzionale, causando ovvio disagio e probabili errori. E siffatti pericolosi significati derivati procurano meno pene al principiante, a cui sono sconosciuti molti argomenti, che allo specialista che invece dovrebbe essere abbastanza esperto a trattare simili casi imbarazzanti!

Eppure i significati derivati dei simboli possono anche rivelarsi utili, talvolta molto utili. Una notazione già adottata in un esercizio precedentemente risolto può aiutare a ricordare qualche procedimento conveniente; certo si deve, però, avere cura di fare una netta distinzione fra l'attuale (originario) significato del simbolo e quello precedente (derivato). Un *sistema di notazioni convenzionale* [come quello comunemente adottato per gli enti di un triangolo, al quale abbiamo accennato nel punto 6 (II)] presenta enormi vantaggi; quando sia stato impiegato un buon numero di volte, esso può aiutare a ricordare diversi procedimenti applicati precedentemente. È piú facile tenere a mente delle formule tradotte con conveniente simbolismo. Naturalmente, si deve prestare una certa attenzione, quando, in particolari circostanze, si sia costretti ad usare un simbolo convenzionale con un significato diverso da quello consueto.

9. Quando si sia costretti a scegliere fra due notazioni, si possono avere validi motivi di preferenza sia per l'una che per l'altra di esse. È necessario allora possedere esperienza e intuito, per scegliere proprio quella piú opportuna, cosí come è necessario possedere esperienza e intuito per scegliere i vocaboli piú efficaci. Quindi è bene conoscere i vari vantaggi ed i vari svantaggi di cui abbiamo dianzi discusso. Ad ogni modo, si dovrebbe sempre scegliere con molta cura il sistema di notazioni e basare tale scelta *su qualche motivo valido.*

10. Non solo gli studenti tardivi, ma anche quelli molto intelligenti possono sentire una vera e propria avversione per l'algebra. L'introduzione di ogni simbolo è sempre un poco arbitraria e artificiosa; imparare a conoscere un nuovo simbolo è faticoso per la mente e, in particolare, per la memoria. Un allievo intelligente si rifiuta di compiere uno sforzo se non ne vede l'utilità; egli può essere giustificato per la sua apatia verso l'algebra, se non gli è stata offerta nessuna occasione di convincersi, attraverso qualche esperienza personale, che *il linguaggio simbolico matematico aiuta la mente.* Compito importantissimo dell'insegnante, uno dei piú delicati, è mettere lo studente in grado di procurarsi tale esperienza.

Dico che si tratta di un compito importantissimo, ma non affermo che esso sia facile. Le precedenti osservazioni possono riuscire di aiuto. Si legga anche *Stabilire un'equazione*. La verifica di una formula attraverso un'accurata analisi delle caratteristiche di cui essa gode è pure altamente consigliabile come esercizio molto istruttivo (v. paragrafo 14 e *Si può verificare il risultato?*, 2).

Pappo. — Pappo fu un insigne matematico greco, che pare sia vissuto intorno al 300 d.C. Nel settimo libro del suo trattato *Collectiones*, egli parla di un tipo di studio che chiama *analyomenos.* Possiamo tradurre questo vocabolo "analisi preziosa", oppure "arte di risolvere i problemi", oppure anche "euristica"; quest'ultima denominazione ci sembra preferibile alle altre in questo momento. Esistono ottime traduzioni del suddetto brano di Pappo; tuttavia il testo originale può essere tradotto, forse un poco piú liberamente, cosí:

"L'euristica è, in poche parole, un particolare tipo di scienza utile a coloro che, dopo avere studiato gli elementi fondamentali della matematica, desiderano acquistare una certa abilità a risolvere problemi; questo è il suo unico impiego. È dovuta essenzialmente a tre costruttori: Euclide, l'autore degli *Elementi*, Apollonio da Perge e Aristeo il Vecchio. Essa insegna i procedimenti di analisi e di sintesi.

"Nell'analisi, si parte da ciò che si vuole ottenere e lo si suppone noto; da tali premesse, si deducono delle conseguenze e, da queste, altre deduzioni, finché si perviene a un punto che può essere assunto quale punto di partenza per la sintesi. Quindi, nell'analisi, si avanza l'ipotesi che ciò che si chiede di fare sia già stato eseguito (ossia sia già stato determinato quello che si deve calcolare, oppure sia già stato dimostrato quello di cui si vuole provare la validità o la falsità). L'indagine procede dal risultato a cui si vuole pervenire; poi si risale via via da ogni deduzione a quella che la precede, finché, risalendo di deduzione in deduzione, si perviene a qualche informazione già nota oppure già dimostrata valida. Questo procedimento è detto analisi, oppure risoluzione a ritroso, oppure ragionamento regressivo.

"Invece, nella sintesi, invertendo l'ordine dei passaggi del procedimento precedente, si parte dal punto in cui si è giunti alla fine dell'analisi, da ciò che risulta già noto oppure già dimostrato valido. Di qui, si deriva il risultato che, nel processo d'analisi, implicava tale conclusione e si continua con deduzioni di questo tipo finché, ripetendo a ritroso gli stessi passaggi dianzi considerati, si giunge infine alla soluzione, oppure alla tesi, cercata. Questo procedimento dicesi sintesi, oppure risoluzione costruttiva, oppure ragionamento progressivo.

"L'analisi, poi, è di due tipi; si ha l'analisi dei 'problemi di dimostrazione' che serve a stabilire la validità dei teoremi e si ha l'analisi dei 'problemi di determinazione' che serve a trovare l'incognita.

"I 'problemi di dimostrazione' richiedono di stabilire se certi teoremi enunciati esplicitamente siano veri o falsi. Si abbia, per esempio, da dimostrare un teorema siffatto, che diciamo A; non si sa, a priori, se esso sia vero o falso. Ma, da A, si ricava un altro teorema B, da B un altro C e cosí via, finché si perviene ad un ultimo teorema L che è ben noto. Allora, se L è vero e purché tutti i processi di derivazione effettuati siano reversibili, anche A è vero. Partendo da L, infatti, si può dimostrare la validità del teorema K che precede questo nell'analisi precedente e, in modo analogo, procedendo sempre a ritroso, dalla validità di C si risale a quella di B e da quella di B a quella di A; cosí il problema è risolto. Invece, se L è falso, resta già provata la falsità di A.

"I 'problemi di determinazione' richiedono di individuare una certa incognita x che soddisfi ad una certa condizione esplicitamente enunciata. Non si sa, a priori, se il problema ammetta soluzioni; ma, supponendo che esista una x che soddisfi alla condizione richiesta, si determina un'altra incognita, e sia y, che deve soddisfare ad una certa condizione connessa con la precedente; poi si nota che y appare legata ad un'altra incognita e cosí via, finché si perviene all'introduzione di un'ultima incognita, che diciamo z, che può essere determinata in virtú di qualche procedimento noto. Se esiste davvero una z che soddisfa alla condizione ad essa relativa, esiste pure una x che soddisfa alla condizione iniziale e questo purché tutti i processi di derivazione effettuati siano reversibili. Per prima cosa, si calcola z; poi, dalla conoscenza di z, si risale a quella dell'incognita che precede z nell'analisi precedente e, in modo analogo, procedendo sempre a ritroso, si perviene infine, dalla conoscenza di y a quella di x; cosí il problema è risolto. Invece, se non è possibile soddisfare in alcun modo alla condizione imposta alla z, il problema iniziale nell'incognita x certamente non ammette soluzioni."

Ripetiamo che il brano ora riportato non è una traduzione letterale, ma libera; è una *parafrasi.* Avanziamo qualche osservazione circa le varie differenze fra il testo originale di Pappo e la nostra versione, perché si tratta di un passo dell'opera del matematico greco molto importante per diversi motivi.

1. È stata qui adottata una terminologia molto piú precisa che nel testo greco e sono stati introdotti i simboli A, B,..., L, x, y,..., z, che là non figurano affatto.

2. Nel testo originale, ci si riferisce in modo esplicito non a problemi di matematica in generale, ma a problemi di geometria solamente. Ma noi abbiamo voluto sottolineare il fatto che i procedimenti descritti da Pappo sono suscettibili di applicazioni non necessariamente limitate a problemi geometrici; essi, in realtà, sono applicabili a problemi di ogni tipo, anche non matematici. Ciò va illustrato con qualche esempio, perché, in questo genere di considerazioni, la generalità e l'indipendenza dalla natura dell'argomento sono di grande importanza (v. par. 3).

3. *Illustrazione di carattere algebrico*. Si determinino quei valori di x che soddisfano all'equazione:

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Ecco un "problema di determinazione" non troppo semplice per un principiante. Per risolverlo, questi dovrebbe avere già una certa familiarità con il concetto di analisi; non intendiamo, naturalmente, riferirci al vocabolo "analisi", bensí vogliamo significare il procedimento in virtú del quale si perviene alla soluzione attraverso successive deduzioni. Inoltre egli dovrebbe sapere risolvere almeno i tipi piú semplici di equazioni algebriche. Innanzitutto, potrebbe allora avere l'ottima idea, la felice intuizione, l'ispirazione di osservare che, essendo $4^x = (2^x)^2$ e $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, potrebbe essere vantaggioso porre:

$$y = 2^x.$$

In realtà si tratta di una posizione conveniente, l'equazione in y che cosí si ottiene, ossia la

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0,$$

risultando manifestamente piú semplice di quella di partenza; ma l'esercizio non può ancora dirsi risolto. È necessario un altro piccolo lampo di genio, cioè il ricorso a quest'altra sostituzione:

$$z = y + \frac{1}{y},$$

che consente di scrivere la condizione iniziale nella forma:

$$8z^2 - 54z + 85 = 0.$$

A questo punto l'analisi ha termine, ammesso che colui al quale il problema è stato proposto conosca il procedimento risolutivo delle equazioni di secondo grado.

E la sintesi, in questo caso, in che cosa consiste? Nello sviluppare, passaggio per passaggio, quei calcoli che l'analisi ha rivelato necessari e possibili. Per completare la risoluzione del problema non è indispensabile ricorrere ad alcun concetto nuovo; basta calcolare con pazienza ed attenzione le varie incognite. L'ordine con cui eseguire i calcoli è l'inverso di quello in cui sono state stabilite le precedenti equazioni; prima si determina z ($z = 5/2, 17/4$), poi y ($y = 2, 1/2, 4, 1/4$) ed infine x ($x = 1, -1, 2, -2$). La sintesi ricalca le orme dell'analisi ed il motivo di questo modo di procedere è facilmente riconoscibile nell'esempio che abbiamo proprio ora considerato.

4. *Illustrazione di carattere non matematico.* Un uomo primitivo deve attraversare un torrente, ma non può tentare di passarlo a guado come fa di solito, perché la pioggia, caduta abbondantemente durante la notte, ha paurosamente innalzato il livello dell'acqua. Ecco che l'attraversamento del torrente diviene l'oggetto di un problema; "attraversare il torrente" è l'incognita x del problema iniziale. Quell'uomo si ricorda, ad un tratto, di avere superato altri corsi d'acqua camminando sul tronco di un albero caduto di traverso fra le due rive opposte; allora si guarda attorno, alla ricerca di un comodo albero abbattuto, che diviene la nuova incognita, y. Lungo i margini del torrente si elevano moltissime piante dal grosso fusto, ma nessuna di esse giace a terra sradicata; il nostro uomo primitivo, logicamente, vorrebbe abbatterne una. Come è possibile farne cadere una attraverso il torrente? Ecco una nuova idea, un nuovo problema, una nuova incognita; in che modo lanciare un tronco fra due rive opposte?

Questa sequenza di idee potrebbe dirsi analisi, secondo la terminologia di Pappo. Se riuscirà a condurre a termine questa analisi, quell'uomo potrà essere considerato l'inventore del ponte e della passerella. Quale sarà poi la sintesi? La traduzione in atto delle idee. L'ultimo stadio della sintesi sarà camminare sul tronco gettato attraverso le acque del torrente.

Nell'analisi e nella sintesi intervengono gli stessi enti, gli stessi oggetti; essi fanno entrare in azione nell'analisi il cervello e nella sintesi i muscoli dell'uomo; l'analisi consta di pensieri, la sintesi delle azioni. C'è un'altra differenza: l'ordine degli uni è l'inverso dell'ordine degli altri. L'attraversamento del torrente è il desiderio primo da cui scaturisce l'analisi ed è l'ultima azione con cui si chiude la sintesi.

5. La nostra parafrasi insiste un poco piú esplicitamente del testo originale intorno all'intimo legame naturale fra analisi e sintesi. Tale connessione appare evidente dagli esempi precedenti. L'analisi si presenta spontaneamente per prima, la sintesi viene dopo; l'analisi è l'invenzione stessa, la sintesi ne è la realizzazione; *analisi è concepire un piano, sintesi è lo sviluppo di questo medesimo piano.*

6. La nostra parafrasi conserva, e mette anzi in risalto, alcune frasi caratteristiche del testo originale: "Si avanza l'ipotesi che ciò che si chiede di fare sia già stato eseguito (ossia sia già stato determinato quello che si deve calcolare, oppure sia già stata dimo-

strata la tesi avanzata)." Sembra un paradosso supporre già risolto il problema che si deve risolvere non è un semplice inganno verso se stessi? Non è chiaro; cosa significa questo comportamento? Difficilmente rimarranno dubbi in proposito, quando si consideri attentamente la frase dianzi riferita e ci si sforzi seriamente di analizzare e comprendere la propria esperienza nel campo della risoluzione dei problemi.

Consideriamo dapprima un "problema di determinazione", in cui x sia l'incognita ed a, b, c siano i dati. "Supporre il problema risolto" significa supporre l'esistenza di una x che soddisfi alla condizione, ossia che stia con i dati a, b, c in quelle relazioni volute dalla condizione stessa. Questa infatti è un'ipotesi accettata al fine di poter iniziare l'analisi; essa è provvisoria e pertanto innocua. In realtà, *se* non esistesse alcuna x siffatta *e* tale analisi non conducesse ad alcun risultato notevole, la nostra supposizione necessariamente porterebbe ad un problema finale che non ammetterebbe soluzioni e quindi, in questa circostanza, è evidente che neppure il problema iniziale ammetterebbe soluzioni. Ecco perché è inutile partire da quel presupposto. Per esaminare la condizione, è necessario assimilare, rappresentarsi mentalmente oppure visualizzare geometricamente le connessioni imposte dalla condizione su x ed a, b, c; come potremmo soddisfare a tale esigenza senza concepire, rappresentarci oppure disegnare effettivamente anche x? Inoltre, partire da simili assunzioni è spontaneo. L'uomo primitivo, sui pensieri e sulle azioni del quale abbiamo discusso al punto 4, immagina di camminare sopra il tronco di un albero e di attraversare cosí il torrente molto prima di eseguire tali azioni nella realtà; egli vede il suo problema "già risolto".

Scopo di un "problema di dimostrazione" è stabilire la validità di un certo teorema A. Il consiglio di "supporre A vero" è proprio un invito a dedurre delle conseguenze dal teorema A, anche se questo teorema non è ancora stato dimostrato. Le persone con una particolare attitudine mentale o portate per un certo genere di filosofia possono rifuggire dal trarre deduzioni da un teorema sulla cui validità non si sa ancora proprio niente; ma queste persone non sanno neppure iniziare un qualsiasi processo d'analisi.

Si confrontino queste considerazioni con quelle esposte nell'articolo intitolato *Figura*, al punto 2.

7. Nella nostra parafrasi, è ripetuta due volte la locuzione "purché tutti i processi di derivazione effettuati siano reversibili" (v. p. 145, riga 40 e p. 146, riga 16). Si tratta di un'aggiunta; nel testo originale non vi è traccia di siffatte limitazioni e una si-

mile omissione fu osservata e criticata in epoca recente. Per il concetto di "riduzione reversibile", si veda *Problemi ausiliari*, 6.

8. Nella nostra parafrasi, l'analisi dei "problemi di dimostrazione" è esposta in termini completamente diversi da quelli impiegati nel testo originale, ma è conservata intatta l'essenza dell'esposizione di Pappo; per lo meno, non vi è stata l'intenzione di alterarne il senso. Invece l'analisi dei "problemi di determinazione" risulta nella parafrasi commentata in modo molto piú concreto che nel testo originale che sembra tendere piuttosto alla descrizione di un procedimento molto piú generale, precisamente alla costruzione di una *catena di problemi equivalenti*; di tale costruzione abbiamo già detto in *Problemi ausiliari*, 7.

9. Numerosi testi di geometria elementare contengono alcune osservazioni circa l'analisi, la sintesi e il "supporre il problema già risolto". Non è certo che siffatta consuetudine pressoché inestirpabile risalga a Pappo, ma è molto difficile trovare fra i soliti libri un volume scritto da un autore che abbia qualche conoscenza diretta con le opere di quel matematico. Si tratta di argomenti importanti quel tanto che basta a farsi trattare persino nei testi a livello elementare, ma sono spesso mal compresi e ancor peggio esposti. Il fatto che essi siano presi in considerazione quasi esclusivamente nei testi di geometria testimonia da solo sulla generale errata interpretazione dei medesimi; il lettore rammenti a questo proposito il precedente punto 2. Ci sentiremo giustificati per avere cosí ampiamente discusso su tale tema, se le considerazioni esposte in questo articolo contribuiranno ad una migliore comprensione dei suddetti processi.

Per un altro esempio, un diverso punto di vista e ulteriori commenti, si veda *Procedendo a ritroso*.

Si rileggano anche *Riduzione all'assurdo e dimostrazione indiretta*, 2.

Pedanteria e padronanza. — Sono due atteggiamenti, l'uno opposto dell'altro, nei confronti delle regole.

1. Applicare una regola alla lettera, meccanicamente, incondizionatamente, quando ciò è necessario ed anche quando non lo è affatto, è pedanteria. Alcuni pedanti sono poveri pazzi; essi con ogni probabilità non hanno mai capito la regola che pure applicano cosí scrupolosamente e inconsideratamente. Altri pedanti riescono sempre nel loro intento; sono quelli che hanno capito la regola, almeno la prima volta in cui l'hanno incontrata (prima di

diventare pedanti) e, di solito, scelgono una regola che vale in molti casi e solo raramente fallisce.

Padronanza è la dote, invece, di chi applica una regola con spontanea disinvoltura e con discernimento, ponendo attenzione alla sua effettiva validità e senza permettere che l'enunciato di questa offuschi la chiara visione del risultato da conseguire, il filo conduttore del ragionamento, il manifestarsi di occasioni nuove.

2. Le domande e i suggerimenti del nostro schema possono essere di valido aiuto sia per chi desideri risolvere problemi sia per chi debba insegnare. Ma, per prima cosa, si devono ben comprendere le une e gli altri, si deve imparare il loro impiego specifico e tale comprensione, tale padronanza vanno acquisite per mezzo di tentativi e di errori, di fallimenti e di risultati brillanti, con l'esperienza personale insomma. In secondo luogo, non si deve mai usare una domanda o un suggerimento in modo pedantesco. Non si rivolga alcuna domanda né si porga alcun suggerimento sconsideratamente, ma seguendo qualche traccia rigorosamente delineata. La mente deve destreggiarsi con elasticità fra varie domande e vari suggerimenti, il cui uso va alternato con saggezza. Si tratta di eseguire un problema difficoltoso ed eccitante? Il passaggio che si deve compiere per cimentarsi poi con quello successivo dovrebbe essere determinato sempre da un'accurata ed ampia comprensione del problema da risolvere. Si vuole aiutare uno studente? Ciò che gli si suggerisce dovrebbe sempre procedere da un'indulgente comprensione per le difficoltà in cui egli si sta dibattendo.

E, se si è inclini ad essere pedanti o ad adagiarsi sopra qualche regola, si accetti questo consiglio: Per prima cosa, si usi sempre il proprio cervello!

Problemi pratici. — Sono tali i problemi che, per molteplici aspetti, differiscono da quelli essenzialmente di matematica, anche se, in sostanza, hanno in comune con questi le cause principali e i metodi con cui possono essere risolti. In particolare, i problemi pratici di ingegneria di solito sono legati a problemi matematici. Diremo qualcosa circa le differenze, le analogie e i legami fra queste due specie di problemi.

1. La costruzione di una diga attraverso un fiume è un imponente problema pratico, per la cui comprensione non è necessaria alcuna conoscenza specifica in proposito. In epoche quasi preistoriche, molti millenni prima che si aprisse l'epoca moderna delle teorie scientifiche, gli uomini costruirono dighe di qualche tipo

nella valle del Nilo e in altre parti del mondo, là dove era necessario irrigare i terreni per raccogliere messi.

Schematizziamo dunque il problema della costruzione di una importante diga ai giorni nostri.

Qual è l'incognita? In un problema siffatto intervengono numerose incognite: il luogo esatto in cui la diga va costruita, la forma geometrica e le dimensioni di questa, il materiale da costruzione, ecc.

Qual è la condizione? Non si può rispondere brevemente a questa domanda, perché molte condizioni devono essere soddisfatte. Per l'attuazione di un progetto cosí impegnativo, è necessario soddisfare a molteplici esigenze economiche e far sí che esse non incidano sfavorevolmente sopra altre di diversa natura. La diga dovrebbe consentire un aumento di produzione di energia elettrica, fornire acqua per l'irrigazione oppure per il consumo degli abitanti di alcuni centri abitati ed inoltre controllare le inondazioni. D'altro canto, essa dovrebbe recare il minimo detrimento possibile alla navigazione sul fiume e all'importante industria peschereccia che esso alimenta, non dovrebbe sciupare con la sua presenza il paesaggio, ecc. Naturalmente, essa dovrebbe costare il meno possibile e potere essere costruita in un periodo di tempo estremamente breve.

Quali sono i dati? Il numero dei dati che sarebbe comodo considerare è spaventoso. Sono necessari dati topografici relativi alle zone attraversate dal fiume e dai suoi affluenti; dati geologici importantissimi per stabilire la solidità delle fondamenta della diga, per ovviare ad eventuali deterioramenti prodotti da possibili infiltrazioni d'acqua, per scegliere i materiali da costruzione piú adatti; dati meteorologici sulle precipitazioni annuali e sul livello delle inondazioni; dati economici riguardanti il valore del terreno che dovrà essere inondato, il costo del materiale e della mano d'opera; e cosí via.

Questo esempio mostra chiaramente che le incognite, i dati e le condizioni di un problema pratico sono in generale molto piú complessi e molto meno precisamente definiti che in un problema puramente matematico.

2. Per risolvere un problema si richiede un determinato insieme di conoscenze acquisite precedentemente. Gli ingegneri moderni dispongono a tale fine di un complesso di cognizioni altamente specializzato, di una teoria scientifica concernente la resistenza e le caratteristiche dei materiali da costruzione, della loro esperienza e di una vasta gamma di testi che costituiscono, nel

loro insieme, una vera e propria letteratura tecnica specifica. Noi non possiamo valerci, a questo punto, di conoscenze cosí particolareggiate e profonde, ma possiamo sempre cercare di immaginare quali idee siano passate nella mente di un antico costruttore di dighe egiziano.

Egli, naturalmente, ha veduto diverse dighe, forse non molto imponenti: banchi di sabbia, oppure in muratura, che trattenevano le acque. Ha osservato i flussi delle correnti, le acque appesantite da detriti di ogni specie e prementi contro lo sbarramento. Potrebbe avere collaborato a riparare delle falle prodotte dall'erosione, essere stato colpito dalla visione di una diga infranta o spazzata via dalla furia dell'acqua. Egli ha certamente udito il racconto di dighe che avevano sfidato i secoli, oppure di altre il cui improvviso cedimento era stato causa di terrificanti sciagure. La mente di quel costruttore può dunque essere pervenuta ad una visione concreta della pressione dell'acqua del fiume contro la muraglia della diga e delle sollecitazioni e resistenze agenti all'interno di essa.

Eppure il nostro costruttore di dighe dell'antico Egitto non aveva alcun concetto preciso, quantitativo, scientifico, della pressione di un fluido o delle sollecitazioni e resistenze interne ad un corpo solido. Questi concetti costituiscono il nucleo del patrimonio intellettuale di un ingegnere dei nostri giorni. Tuttavia egli pure dispone di una notevole cultura in merito, anche se essa non ha ancora raggiunto un livello scientifico rigoroso; tutto ciò che egli sa intorno all'erosione prodotta dal flusso dell'acqua, al trasporto dei detriti, alla plasticità e ad altre caratteristiche non completamente individuate di certi materiali da costruzione è una vera e propria conoscenza, sia pure allo stato embrionale.

Il nostro esempio mostra che le conoscenze necessarie ed i concetti indispensabili cui ricorrere sono piú complessi e molto meno esplicitamente determinati nei problemi pratici che in quelli di matematica.

3. Le incognite, i dati, le condizioni, i concetti, le conoscenze fondamentali indispensabili, tutto ciò è piú complesso e molto meno esplicitamente determinato nei problemi pratici che in quelli di matematica pura. Questo fatto mette in evidenza una profonda differenza, forse la diversità piú notevole, fra i due tipi di problemi che stiamo confrontando e, senza dubbio, seguono di qui altri caratteri distinti; tuttavia le origini prime ed i medesimi processi di risoluzione appaiono identici per entrambe le specie di tali questioni.

È opinione largamente diffusa che, per risolvere i problemi pratici, occorra piú esperienza di quella richiesta dalla risoluzione dei problemi di matematica. Può essere. Ma, molto probabilmente, la differenza consiste nella natura delle conoscenze che servono e non nell'abilità personale dinanzi ai vari argomenti. Per risolvere un problema dell'uno o dell'altro tipo, si deve far ricorso all'esperienza acquisita precedentemente trattando problemi analoghi e domandarsi sovente: *Lo stesso problema si è già presentato sotto un aspetto leggermente diverso? È noto un problema connesso con questo?*

Nella risoluzione di un problema matematico, si inizia da concetti molto chiari che manifestamente si presentano ordinati nella mente secondo una precisa disposizione. Nella risoluzione di un problema pratico, si è spesso obbligati a partire da concetti piuttosto confusi; quindi la chiarificazione di tali concetti diviene una parte essenziale del problema. Allo stesso modo la medicina si trova, in relazione al problema delle malattie infettive, in una posizione oggi molto piú avanzata di quanto fosse ai tempi di Pasteur, quando persino il concetto di infezione era ancora nebuloso. *Sono stati presi in considerazione tutti i concetti essenziali che intervengono nel problema?* Questa domanda è molto efficace in problemi di ogni sorta, ma il suo impiego subisce numerose variazioni secondo la natura dei concetti che, volta a volta, entrano in gioco.

In un problema matematico perfettamente determinato, tutti i dati e tutte le clausole della condizione sono essenziali e devono essere presi in esame. In un problema pratico, intervengono dati e condizioni in grande quantità; pur prendendone in esame il maggior numero possibile, si è sempre costretti a trascurarne qualcuno. Si consideri, per esempio, di nuovo il caso del progettista di una immensa diga. Egli tiene conto dell'interesse pubblico e dei principali vantaggi economici, ma necessariamente deve trascurare alcune esigenze di minore importanza e non curarsi di molte proteste. I dati di questo problema sono inesauribili. Cosí quel progettista desidererebbe sapere qualcosa di piú sulla composizione geologica del terreno su cui vanno gettate le basi della costruzione, ma probabilmente, ad un certo momento, deve smettere di raccogliere informazioni anche se resta inevitabilmente un certo margine di incertezza.

Si è fatto uso di tutti i dati? È stata considerata l'intera condizione? Non si possono lasciar perdere queste domande quando si stiano risolvendo problemi di matematica pura. Invece, nei problemi pratici, le stesse domande vanno modificate: *Si è fatto uso di tutti i dati che possono recare un contributo apprezzabile alla risoluzione? Sono state considerate tutte quelle circostanze che possono influenzare sensibilmente la soluzione?* Si considerano in blocco tutte le molte informazioni disponibili, se è necessario se ne raccolgono altre ancora; ma, alla fine, bisogna arrestarsi, disegnare in qualche modo il progetto, perché non si può fare a meno di trascurare qualche fattore. "Chi vuol navigare senza pericolo non si metta per mare." Quasi sempre c'è un buon numero di dati superflui che non hanno alcun peso sull'espressione del risultato finale.

4. I progettisti delle antiche dighe egiziane potevano affidarsi soltanto ad un'interpretazione, dettata dal buon senso, della loro esperienza personale; non avevano altro cui appellarsi. L'ingegnere moderno, invece, può ricorrere non solo al buon senso, ma a teorie scientifiche, soprattutto se il suo progetto concerne un piano nuovo e avanzato; egli deve calcolare la resistenza della diga da costruire, prevedere quantitativamente le sollecitazioni e le resistenze che si manifesteranno all'interno di essa, ecc. Quindi deve applicare la teoria dell'elasticità (che, in pratica, è fondamentale per ogni tipo di costruzione). Per poter applicare tale teoria, bisogna far uso di molta matematica; cosí il problema pratico di ingegneria è ricondotto a un problema di matematica.

Quest'ultimo problema è troppo particolare e specifico per poter essere preso in considerazione nel nostro studio; tutto ciò che possiamo dire su di esso è la seguente osservazione di carattere generale. Quando si abbiano da stabilire e da risolvere problemi matematici derivanti da problemi pratici, comunemente ci si accontenta di *approssimazioni.* Sovente si è costretti a trascurare i dati e le condizioni meno rilevanti del problema pratico. Dunque è logico supporre che sia consentita qualche imprecisione anche nei calcoli, specialmente se ciò genera maggiore speditezza e chiarezza.

5. Circa le approssimazioni, si potrebbero fare numerose osservazioni di interesse generale. Ma, poiché non possiamo ammettere che il lettore abbia una conoscenza matematica specifica di tale argomento, ci limiteremo ad avanzare un solo esempio particolarmente intuitivo e soprattutto significativo.

Disegnare le carte geografiche è un importante problema pratico. Per la realizzazione di una carta siffatta, si suppone spesso che la Terra sia sferica: ciò non corrisponde alla realtà: è solo un'ipotesi valida in sede di approssimazione. Infatti la superficie terrestre non può essere definita in termini matematici e ciascuno di noi sa perfettamente che il nostro pianeta è schiacciato ai poli. Tuttavia, supponendo la Terra sferica, si può disegnare una carta geografica molto piú facilmente; cosí facendo, si guadagna enormemente in semplicità e non si perde gran che in precisione. Infatti, si pensi ad una grossa palla che abbia la medesima forma della Terra e tale che, al suo equatore, presenti un diametro di 7,5 m. La distanza fra i poli di una palla siffatta è minore di 7,5 m, perché la Terra in quei punti è leggermente appiattita; ma la differenza è inferiore a 2 cm. Quindi la sfera corrisponde a un'approssimazione accettabile in ogni questione pratica.

Problemi di determinazione, problemi di dimostrazione. — Stabiliamo un confronto fra queste due categorie di problemi.

1. Scopo di un "problema di determinazione" è trovare un determinato ente, l'incognita del medesimo problema.

L'incognita dicesi anche *quaesitum*, ossia "ciò che si cerca", "ciò che è richiesto". I "problemi di determinazione" possono essere teorici o pratici, astratti o concreti, esercizi molto seri o giochi di enigmistica. Si possono avere le incognite piú diverse; si può cercare di calcolare, ottenere, conoscere, produrre o costruire oggetti delle specie piú disparate. In un problema relativo al racconto di un delitto l'incognita è l'assassino. In un problema di scacchi la incognita è una mossa dei giocatori. In certe sciarade l'incognita è una parola. In alcuni problemi di algebra elementare l'incognita è un numero. In un problema di costruzione geometrica l'incognita è un punto oppure una figura.

2. Scopo di un "problema di dimostrazione" è provare rigorosamente che una certa affermazione esplicitamente enunciata è vera, oppure falsa. Si tratta di rispondere alla domanda: "Questa proposizione è vera, oppure è falsa?" E si deve trovare una risposta rigorosamente esatta, sia nel caso in cui l'affermazione sia vera che in quello in cui sia falsa.

Un avvocato difensore afferma che l'accusato ha trascorso in casa una certa notte. Il giudice deve stabilire se ciò sia vero oppure no e quindi deve procurarsi tutte le testimonianze possibili. Il giudice pertanto ha da risolvere un "problema di dimostrazione" Un altro problema di questo tipo è la dimostrazione del teorema di Pitagora. Comunemente, però, non si dice: "Stabilire se il teorema di Pitagora è vero o falso." Eppure, sotto diversi aspetti, sarebbe meglio accennare sempre, negli enunciati di problemi siffatti, anche alla possibilità della seconda alternativa; però, in certi casi, la si può effettivamente omettere: per esempio, sappiamo tutti che la probabilità di riuscire a dimostrare la falsità del teorema di Pitagora è nulla!

3. Le parti principali di un "problema di determinazione" sono l'*incognita*, i *dati* e la *condizione*.

Si debba costruire un triangolo, i cui lati, rispetto ad un'unità prefissata, misurino a, b, c; l'incognita è un triangolo, i dati sono le misure a, b, c e la condizione è che il triangolo suddetto abbia lati di queste misure. Se si dovesse costruire un triangolo le cui altezze misurassero a, b, c, l'incognita sarebbe un ente della stessa specie che nell'esercizio precedente, i dati sarebbero ancora i medesimi, ma sarebbe diversa la condizione che lega fra loro incognita e dati.

4. Se un "problema di dimostrazione" è un esercizio matematico di tipo consueto, le parti principali di esso sono l'*ipotesi* e la *tesi* del teorema di cui si deve provare la validità o la falsità.

"Se i quattro lati di un quadrilatero sono eguali fra loro, allora le diagonali del medesimo poligono sono mutuamente perpendicolari." La tesi è costituita dalla seconda parte dell'enunciato, dal vocabolo "allora" sino alla fine; l'ipotesi dalla prima parte, ossia dal "se" fino alla virgola.

[Si noti che non tutti i teoremi di matematica possono essere divisi cosí nettamente in ipotesi e tesi. Questo è, per esempio, il caso dell'enunciato: "Esistono infiniti numeri primi".]

5. Quando si debba risolvere un "problema di determinazione", bisogna conoscere, e conoscere molto precisamente, le sue parti principali, ossia l'incognita, i dati e la condizione. Il nostro schema presenta un gran numero di domande e di suggerimenti relativi a tali parti.

Qual è l'incognita? Quali sono i dati? Qual è la condizione?

Si separino le varie parti della condizione.

Si determinino i legami che intercedono fra i dati e l'incognita.

Si rifletta sull'incognita! E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga.

Si tenga conto soltanto di una parte di condizione, trascurando l'altra; fino a che punto risulta allora determinata l'incognita e come può essa variare? Si può ricavare qualche informazione utile dai dati? Si possono trovare altri dati utili a determinare l'incognita? Si possono cambiare i dati, oppure l'incognita, oppure se necessario tutte queste quantità, in modo che la nuova incognita ed i nuovi dati siano quasi eguali ai precedenti?

Si è fatto uso di tutti i dati? È stata considerata l'intera condizione?

6. Quando si debba risolvere un "problema di dimostrazione", bisogna conoscere, e conoscere molto precisamente, le sue parti principali, ossia l'ipotesi e la tesi. Ci sono utili domande e suggerimenti relativi a tali parti; le une e gli altri corrispondono a quelle domande ed a quei suggerimenti del nostro schema che si riferiscono propriamente ai "problemi di determinazione".

Qual è l'ipotesi? Qual è la tesi?

Si separino le varie parti dell'ipotesi.

Si determinino i legami che intercedono fra l'ipotesi e la tesi.

Si rifletta sulla tesi! E ci si sforzi di ricordare qualche teorema precedentemente dimostrato avente la stessa tesi oppure una tesi analoga.

Si tenga conto soltanto di una parte di ipotesi, trascurando l'altra; la tesi resta valida? Si può ricavare qualche informazione utile dall'ipotesi? Si può trovare un'altra ipotesi dalla quale dedurre facilmente la stessa tesi? Si può mutare l'ipotesi, oppure la tesi, oppure se necessario l'ipotesi e la tesi, in modo che la nuova ipotesi e la nuova tesi siano quasi eguali alle precedenti?

È stata considerata l'intera ipotesi?

7. I "problemi di determinazione" sono piú importanti nell'ambito della matematica elementare, i "problemi di dimostrazione" in quello della matematica superiore. Nel presente volume, i "problemi di determinazione" sono trattati piú diffusamente di quelli dell'altro tipo, ma l'autore si propone di ristabilire un certo equilibrio in una trattazione piú ampia del medesimo argomento.

Progressi e compimento. — Si è compiuto qualche progresso? Qual era il fine essenziale? Si possono rivolgere domande siffatte o a se stessi, quando si sia alle prese con la risoluzione di un problema, o ad un alunno a cui si sta insegnando. Cosí si è soliti valutare, piú o meno esplicitamente, in ciascun caso effettivo i progressi che si compiono a mano a mano e le difficoltà che ancora separano dalla meta. Il passaggio da questi casi concreti ad una descrizione generale non è affatto semplice. Eppure è necessario compiere tale passo per completare il nostro studio di euristica e per illustrare l'essenza dei progressi e del compimento che caratterizzano la risoluzione dei problemi.

1. Per risolvere un problema, dobbiamo intanto possedere qualche conoscenza circa l'argomento di cui esso tratta e, per prima cosa, cercare di scegliere e collegare le principali informazioni

in merito che fanno parte della nostra cultura scientifica inizialmente assopita. Alla fine, la visione che conseguiamo del problema è piú vasta che all'inizio; in che cosa consiste questo ampliamento? In ciò che siamo riusciti a ricavare dalla memoria. Per arrivare alla soluzione del problema, bisogna ricordare vari concetti fondamentali. Si tratta di ricostruire e connettere problemi risolti precedentemente, teoremi noti, definizioni, nel caso di un problema di matematica. La riesumazione di queste notevoli informazioni dalla nostra memoria può dirsi *mobilitazione.*

2. Tuttavia, per risolvere un problema, non è sufficiente ricordare nozioni isolate; è necessario anche combinare fra loro tali nozioni in modo che la combinazione risultante si adatti opportunamente al problema in istudio. Cosí, nella risoluzione di un problema di matematica, si deve costruire un ragionamento nel quale tutto il materiale raccolto sia coordinato in un conveniente assetto sistematico. Questo processo di adattamento e combinazione del proprio patrimonio intellettuale può dirsi *organizzazione.*

3. Infatti la mobilitazione e l'organizzazione non possono mai essere nettamente separate l'una dall'altra. Quando ci si applica intensamente ad un problema, vengono alla mente solo quelle nozioni che sono piú o meno connesse con l'esercizio proposto e si tratta di collegare e di ordinare soltanto quel materiale che cosí è stato mobilitato ed organizzato.

La mobilitazione e l'organizzazione sono due *aspetti* di un medesimo complicato processo mentale che presenta anche molte altre forme.

4. Un altro aspetto del progresso si identifica con la circostanza che *la visione del problema cambia* a mano a mano che si procede verso la soluzione. Arricchita dalle nozioni che sono state ricordate, collegate, adattate al particolare caso in esame e rielaborate, la nostra comprensione iniziale del problema si fa piú profonda e la visione che abbiamo di esso alla fine è piú complessa di quella iniziale. Volendo passare dalla visione iniziale di un problema ad un'altra piú precisa e piú conveniente, si tentino vari approcci e si riguardi l'esercizio da diversi punti di vista. È difficile riuscire a compiere qualche progresso senza ricorrere all'artificio *Variazione del problema.*

5. La visione della soluzione che si sta cercando diviene sempre piú limpida via via che ci avviciniamo ad essa e da questo sintomo possiamo comprendere se siamo piú o meno prossimi al compimento della nostra impresa. Con il progredire del nostro studio di un problema, *intuiamo* sempre piú distintamente cosa dovrem-

mo fare per ottenerne la soluzione ed in quale modo. In particolare, nel caso di un problema di matematica, con un briciolo di fortuna si possono intuire il vantaggio e la necessità dell'applicazione di un teorema noto, della considerazione di un problema precedentemente risolto, del ricorso al significato e alla definizione di un certo vocabolo tecnico. Naturalmente queste cose non si possono prevedere con assoluta certezza, ma solo con un buon margine di plausibilità. La certezza assoluta si raggiunge soltanto quando si è pervenuti alla soluzione; fino a quel momento, ci si deve accontentare di congetture piú o meno plausibili. Non si può giungere a una soluzione rigorosa ed esauriente senza abbandonarsi prima a considerazioni puramente ipotetiche e provvisorie. È necessario fare, almeno all'inizio, un *Ragionamento euristico.*

6. Cosa significa progresso verso la soluzione? Significa intensificare i processi di mobilitazione e di organizzazione della nostra conoscenza, evoluzione della nostra visione del problema, riconoscimento graduale dei passaggi di cui consterà il procedimento nella sua stesura definitiva. Può essere si tratti di un lento avanzamento, a piccoli passi quasi impercettibili, ma di tanto in tanto si verifica un improvviso slancio in avanti, a passi da gigante. Un subitaneo avanzamento verso la risoluzione dicesi *Idea luminosa*, ottima idea, felice intuizione, onda telepatica (la lingua tedesca dispone di un vocabolo piú tecnico, *Einfall*). Cos'è un'idea luminosa? Un inaspettato e fulmineo mutamento di prospettiva, una improvvisa riorganizzazione del modo di vedere il problema, una sicura previsione appena intravista dei passaggi che devono essere eseguiti per ottenere la soluzione.

7. Le considerazioni precedenti mettono in luce il ruolo fondamentale delle domande e dei suggerimenti del nostro schema. Molte di tali domande e numerosi suggerimenti di questo tipo hanno come scopo immediato la *mobilitazione* delle conoscenze già acquisite: *Questo problema è già noto? Oppure lo stesso problema si è già presentato sotto un aspetto leggermente diverso? È noto un problema connesso con questo? Si conosce un teorema che potrebbe essere utile? Si rifletta sull'incognita! E ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga.*

Vi sono situazioni caratteristiche in cui si pensa di avere fatto appello ad informazioni di tipo conveniente e si procede quindi ad una migliore *organizzazione* del materiale mobilitato: *Ecco un problema connesso con quello proposto e risolto precedentemente. È possibile sfruttarlo? Si può fare uso del suo risultato? Si* *può fare uso del suo metodo? Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?*

Ci sono altre situazioni caratteristiche in cui si pensa di avere fatto appello ad un numero insufficiente di informazioni. Allora ci si chiede cosa sia stato trascurato: *Si è fatto uso di tutti i dati? È stata considerata l'intera condizione? Sono stati presi in esame tutti i concetti essenziali che intervengono nel problema?*

Alcune domande riguardano in particolare la *variazione* del problema: *Si può enunciare il problema in altra forma? Lo si può enunciare in forma ancora diversa?* Molti quesiti si riferiscono a particolari metodi di variazione dell'esercizio, fra cui il ricorso alla *Definizione* di qualche ente, l'impiego della *Antologia*, della *Generalizzazione*, della *Particolarizzazione*, dello *Scomporre e ricomporre.*

Altre domande ancora suggeriscono un tentativo per *prevedere* la natura della soluzione a cui si tende: *È possibile soddisfare alla condizione? La condizione è sufficiente a determinare l'incognita? Oppure essa non è sufficiente? Oppure è sovrabbondante? Oppure è contraddittoria in termini?*

Nessuna domanda e nessun suggerimento del nostro schema accennano esplicitamente al concetto di *Idea luminosa*; ma, in realtà, ognuno di essi è legato essenzialmente a tale nozione. Comprendendo il problema ci si prepara ad accogliere il lampo di genio; concependo un piano si tenta di provocare lo scintillio di una idea luminosa; avendola provocata la si determina; analizzando il procedimento ed il risultato del problema si tenta di conferire alla felice intuizione che ha condotto alla risoluzione l'aspetto piú elegante.[7]

Giochi d'enigmistica. — Secondo quanto è stato esposto nel paragrafo 3, le domande e i suggerimenti del nostro schema sono indipendenti dall'argomento e sono applicabili a problemi di ogni genere. È interessante avvalorare questa affermazione tramite una applicazione di essi all'enigmistica.

Si consideri, per esempio, il vocabolo

sossopra.

Si tratta di trovare un "anagramma", ossia un nuovo arrangia-

[7] Molte considerazioni svolte in questo articolo si trovano esposte in modo piú completo nella pubblicazione dell'autore, "Acta Psychologica", vol. 4 (1938), pp. 113-170.

mento delle lettere contenute nella parola data in modo che esse formino un altro vocabolo di senso compiuto. È notevole osservare che anche quando si debba risolvere un gioco siffatto molte domande del nostro elenco si rivelano pertinenti e persino efficaci.

Qual è l'incognita? Un vocabolo.

Quali sono i dati? Le lettere del vocabolo *sossopra.*

Qual è la condizione? La parola richiesta deve essere di otto lettere e queste otto lettere devono essere proprio quelle che costituiscono il vocabolo assegnato. È probabile che l'incognita sia una parola abbastanza usata nella lingua italiana.

Si disegni una figura. È molto utile disegnare otto intervalli, oppure otto punti:

. . . .

Si può enunciare il problema in altra forma? Si cerca una parola contenente, secondo qualche arrangiamento, tutte e sole le lettere

A O O   P R S S S.

Questa è senza dubbio una forma equivalente del problema assegnato (v. *Problemi ausiliari*, 6); forse è un nuovo enunciato piú vantaggioso del precedente. Separando le vocali dalle consonanti (il che è importante, mentre non lo è l'ordine alfabetico), si vede un altro aspetto dell'esercizio; infatti si nota subito che il vocabolo richiesto deve avere tre sillabe e non può presentare dittonghi, dato il numero delle consonanti e la poca varietà di vocali e di consonanti.

Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo. Un problema connesso con quello attuale potrebbe consistere nel tentare di costruire delle sillabe con le lettere assegnate; ciò è senz'altro possibile. In seguito, si può cercare di combinare fra loro le sillabe cosí trovate, in modo da pervenire alla soluzione.

Si riesce a risolvere almeno una parte del problema? Il vocabolo richiesto è abbastanza lungo, ma non tanto da fare supporre che esso sia composto con altre parole, oppure derivato da altri nomi, con l'aggiunta ad essi di qualche desinenza. Con quale sillaba potrebbe terminare?

. . . . . . PA,
. . . . . . PO,
. . . . . . SA,
. . . . . . SO,
. . . . . . RA,

. . . . . . RO,
. . . . . PRA,
. . . . . PRO.

Con quale sillaba potrebbe iniziare? Evidentemente con le stesse scritte qui sopra ed inoltre con le seguenti: PAR, PAS, POR, POS, SAR, SOR, ROS.

Si tenga conto soltanto di una parte di condizione, trascurando l'altra. Si può pensare a qualche parola abbastanza lunga, probabilmente di tre sillabe, con poche vocali rispetto alle consonanti fra le quali predomina la S.

Le domande e i suggerimenti del nostro schema non possono operare miracoli, né fornire la soluzione di tutti i possibili giochi d'enigmistica, se il solutore non s'impegna. Per indovinare l'anagramma, è necessario continuare per tentativi e riflettere; tutto ciò che possono fare tali domande e suggerimenti è procurare all'investigazione un'elasticità sempre scattante. A chi è sul punto di darsi per vinto e di abbandonare ogni ulteriore tentativo di scoperta, essi dovrebbero essere in grado di suggerire un nuovo artificio, un nuovo aspetto ed una nuova variazione del problema, un nuovo incentivo; obbligano a riflettere, ecco tutto e, con il loro aiuto, il lettore perverrà alla soluzione del giochetto qui considerato, ossia al vocabolo *sorpasso*.

Per un altro esempio, si veda *Scomporre e ricomporre*, 8.

Riduzione all'assurdo e dimostrazione indiretta. — Sono due procedimenti distinti, ma connessi fra loro.

La *riduzione all'assurdo* prova la falsità di una proposizione assunta come ipotesi deducendo da questa una conclusione manifestamente assurda. La "riduzione all'assurdo" è un procedimento matematico, ma presenta qualche rassomiglianza con l'ironia che è il metodo prediletto dalla satira. L'ironia, a quanto sembra, adotta una certa opinione e la forza, la contorce fino a ricavarne un'evidente assurdità.

La *dimostrazione indiretta* stabilisce la validità di una proposizione provando la falsità della negazione di questa. Quindi la dimostrazione indiretta può essere paragonata al trucco di certi uomini politici che esaltano i candidati del loro partito demolendo la reputazione dei loro avversari.

Sia la "riduzione all'assurdo" che la "dimostrazione indiretta" sono efficaci strumenti di scoperta che si presentano spontaneamente quando ci si applichi con serietà ad un problema. Tuttavia esse non sono ben viste da alcuni filosofi e da molti principianti, il che è comprensibilissimo; chi fa della satira o della politica si rivolge ad una particolare categoria di persone. Illustreremo l'efficacia di entrambi i procedimenti con esempi e ci soffermeremo a discutere le obiezioni che spesso vengono sollevate contro la loro applicazione.

1. *Riduzione all'assurdo.* Usando tutte le nove cifre significative e lo zero ciascuna una volta sola, scrivere dei numeri che abbiano come somma il numero 100.

Si può imparare molto cercando di risolvere questa specie di giochetto, il cui enunciato richiede forse qualche spiegazione.

Qual è l'incognita? Un gruppo di numeri e, per numeri, si intende qui numeri interi, naturalmente.

Quali sono i dati? Il numero 100.

Qual è la condizione? La condizione consta di due parti. La prima parte esige che, scrivendo i numeri richiesti, si usino tutte le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ciascuna una volta sola. La seconda parte impone che la somma di tutti questi numeri abbia valore 100.

Si tenga conto soltanto di una parte di condizione, trascurando l'altra. È facile soddisfare alla prima parte di esse. Nella scrittura dei numeri 19, 28, 37, 46, 50, ciascuna cifra si presenta una volta solamente. Ma è immediato verificare che questo insieme di numeri non soddisfa alla seconda parte della condizione; infatti la somma dei suoi elementi è eguale a 180 e non a 100. Tuttavia possiamo trovare un risultato migliore. "Si tenti, si tenti di nuovo." Ecco, per esempio

$$19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99.$$

La prima parte della condizione è soddisfatta e la seconda quasi, avendo ottenuto 99 invece di 100. D'altra parte, anche la seconda clausola della condizione può essere soddisfatta facilmente quando si trascuri invece la prima:

$$19 + 28 + 31 + 7 + 6 + 5 + 4 = 100.$$

Che la prima parte di condizione non sia verificata è evidente: nella scrittura di questi ultimi numeri che hanno somma eguale a 100, la cifra 1 è ripetuta due volte, mentre non figura affatto lo 0; per le altre cifre, invece, va tutto bene. "Si tenti, si tenti di nuovo."

Ma, dopo qualche tentativo infruttuoso, si comincia a sospettare che non sia possibile in alcun modo ottenere 100 come somma di numeri del tipo di quelli che si richiedono. Alla fine, sorge il problema: *Dimostrare che è impossibile soddisfare simultaneamente ad entrambe le clausole della condizione del problema assegnato.*

Anche gli studenti migliori possono trovare questo problema superiore alle loro forze; eppure esso risulta abbastanza facile a chi è dotato di una certa intuizione. *Si tratta di esaminare l'ipotetica situazione che si verrebbe a creare quando fossero simultaneamente soddisfatte entrambe le clausole della condizione.*

Abbiamo il dubbio che una circostanza siffatta non possa mai venirsi a creare nella realtà ed il nostro dubbio, nato dall'esperienza di tentativi infruttuosi, ha qualche fondamento. Tuttavia ragioniamo esplicitamente ed affrontiamo la situazione nella quale, per supposizione, per pretesa, siano verificate entrambe le parti della condizione. Quindi immaginiamo un gruppo di numeri tali che la loro somma sia eguale a 100; questi numeri devono essere di una od al massimo due cifre; le cifre di cui si dispone sono dieci e, nella scrittura dei numeri richiesti, esse devono figurare tutte e ciascuna una volta sola. Pertanto la somma dei soli possibili numeri ad una cifra che potremmo scrivere è:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Vediamo allora che alcune cifre incidono sulla cifra delle unità ed altre su quella delle decine del numero che esprime la nostra somma; con un po' di furbizia, si può arguire che *la somma dei numeri formati con le cifre che incidono sulla cifra delle decine* ha un'importanza particolare. Infatti, indicando con d tale somma, quella dei numeri costituiti con le cifre di cui ancora si dispone risulta eguale a $45-d$. Quindi d deve soddisfare alle seguenti condizioni:

$$10d + (45-d) = 100.$$

Si tratta di risolvere questa equazione nell'incognita d; è un'equazione di primo grado che ammette come soluzione

$$d = \frac{55}{9}.$$

A questo punto otteniamo qualcosa di sostanzialmente errato. Infatti d deve essere, naturalmente, un numero intero, mentre il valore ora determinato non è tale. Quindi, partendo dall'ipotesi che potessero essere simultaneamente soddisfatte entrambe le parti della condizione, si perviene ad un assurdo evidente. Come si può spiegare questa circostanza? Solo ammettendo che la nostra ipotesi iniziale non sia valida; entrambe le clausole della condizione *non possono* essere simultaneamente soddisfatte. Cosí abbiamo fatto centro, siamo riusciti a dimostrare che le due parti della condizione sono incompatibili fra loro.

Il ragionamento svolto è una tipica "riduzione all'assurdo"

2. *Osservazioni.* Riprendiamo il ragionamento precedente per comprenderne lo sviluppo e generalizzarlo.

Si vuole dimostrare che è impossibile soddisfare ad una certa condizione, ossia dimostrare che non può mai verificarsi una situazione in cui siano simultaneamente verificate entrambe le parti della condizione. Ma, se non abbiamo ancora dimostrato nulla, non resta che affrontare la possibilità di una situazione siffatta: solo affrontandola con coraggio ed analizzandola a fondo possiamo sperare di scoprire in essa qualcosa di scorretto. Ed è necessario avere una prova rigorosa di qualche errore per potere concludere senza ulteriori incertezze che tale situazione è impossibile. Quindi si può, a questo punto, riconoscere che il procedimento dimostratosi tanto efficace nell'esempio di poco fa è valido in generale: si deve analizzare l'ipotetica situazione in cui sono soddisfatte tutte le parti della condizione, *anche se tale situazione appare estremamente improbabile.*

Un lettore che abbia un po' di esperienza può accorgersi ora di un altro fatto. Il passaggio piú importante del metodo descritto consiste nello stabilire un'equazione in d. Ma alla medesima equazione si sarebbe potuto giungere anche senza dubitare affatto della effettiva possibilità di soddisfare alla condizione. Quando si voglia stabilire un'equazione di questo tipo, basta esprimere in linguaggio matematico l'affermazione che tutte le parti della condizione sono soddisfatte, *anche se non si sa ancora se è davvero possibile soddisfare simultaneamente a tutte le parti in questione.*

Questo metodo è "di larghe vedute". Si può sperare di determinare cosí l'incognita che soddisfa alla condizione, oppure sperare di dimostrare che la medesima condizione non può in alcun modo essere soddisfatta. Da un certo punto di vista, poco importa quello a cui si tende: l'indagine, se ben condotta, inizia in entrambe le eventualità allo stesso modo, cioè con la considerazione dell'ipotetica situazione in cui la condizione è completamente verificata, e soltanto alla fine mostra quale delle due speranze è lecita.

Si leggano anche *Figura*, 2 e *Pappo*; un'analisi che termina con l'affermazione della falsità di un teorema proposto, oppure con la conclusione che un assegnato "problema di determinazione" non ammette soluzioni è, in sostanza, una "riduzione all'assurdo".

3. *Dimostrazione indiretta.* I numeri primi, o semplicemente i primi, sono quei numeri interi che, come 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ..., pur essendo maggiori dell'unità, non possono essere scomposti in fattori. (Piú precisamente, si dovrebbe dire che un numero è primo quando ammette come divisori soltanto se stesso e l'unità; da tale definizione risulta allora immediatamente che il numero 1 ha una natura particolare, per cui esso non viene comunemente considerato un numero primo.) I numeri primi possono essere riguardati come gli "ultimi elementi" in cui tutti i numeri maggiori dell'unità possono essere scomposti. Per esempio, 630 può essere scomposto nel prodotto di cinque numeri primi; infatti:

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,.$$

La successione dei numeri primi è costituita da un numero finito oppure infinito di elementi? È spontaneo supporre che essa non abbia mai fine, perché, in caso contrario, tutti i numeri interi potrebbero essere scomposti nel prodotto di fattori primi in numero finito ed allora, per cosí dire, l'universo apparirebbe troppo "limitato". Nasce quindi il problema di dimostrare l'esistenza di un'infinità di numeri primi.

Si tratta di un problema molto diverso dai soliti esercizi di matematica elementare e, a prima vista, sembra celare difficoltà insuperabili. D'altra parte, come abbiamo già osservato, è estremamente improbabile che esista un ultimo numero primo che diremo P, tanto per fissare le idee. Perché tale esistenza è cosí improbabile?

Affrontiamo con coraggio la situazione ipotetica che esista un ultimo numero primo P. Allora potremmo scrivere la successione completa dei numeri primi: 2, 3, 5, 7, 11, ..., P. Per quale motivo ciò non può essere? Quale errore si cela in questa scrittura? Possiamo individuarlo precisamente? In effetti, sí. Consideriamo a tale scopo il numero

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P) + 1.$$

Il numero Q è maggiore di P e quindi, per la nostra ipotesi che P sia l'ultimo numero primo, non può essere primo a sua volta. Segue che Q deve essere divisibile per almeno un numero primo. Ora, tutti i numeri primi a nostra disposizione sono, per ipotesi, solo i numeri 2, 3, 5, 7, 11, ..., P; ma la divisione di Q per ciascuno di essi presenta sempre un resto eguale ad 1; allora si conclude che Q non è divisibile per nessuno dei numeri primi scritti qui sopra che, per ipotesi, sono tutti e soli i numeri primi esistenti. A questo punto è chiaro che c'è qualcosa di scorretto; Q deve essere o un numero primo o divisibile per qualche numero primo. Supponendo l'esistenza di un ultimo numero primo P, siamo giunti ad un assurdo manifesto. Come si spiega ciò? Certo è errata l'ipotesi; evidentemente non può esistere un ultimo numero primo P. Cosí siamo riusciti a dimostrare che la successione dei numeri primi è illimitata.

La dimostrazione svolta è una tipica "dimostrazione indiretta"; essa è la classica dimostrazione riferita nella Proposizione 20 del Libro IX degli *Elementi* di Euclide.

Il precedente teorema (relativo all'esistenza di infiniti numeri primi) è stato dimostrato provando rigorosamente la falsità della tesi opposta (l'esistenza di un ultimo numero primo); tale falsità è stata, a sua volta, dimostrata deducendo da essa un evidente assurdo. Cosí facendo, abbiamo usato sia il metodo di "dimostrazione indiretta" che quello di "riduzione all'assurdo"; anche questa combinazione è veramente caratteristica.

4. *Obiezioni.* I metodi che stiamo descrivendo sollevarono fin dai tempi antichi considerevoli obiezioni. Intorno ad essi sono state tessute molte critiche che, in effetti, altro non sono che forme diverse di una medesima obiezione fondamentale. Di tale critica, illustreremo qui un aspetto "pratico", conforme al livello del nostro studio.

Trovare una dimostrazione non evidente di una proposizione è una notevole conquista della mente, ma imparare tale dimostrazione, oppure semplicemente comprenderla a fondo, richiede una certa fatica intellettuale. È abbastanza naturale pretendere di ricavare da un simile sforzo qualche beneficio e, ovviamente, di dedurne delle informazioni da ricordare che siano vere ed esatte, non false o assurde.

Ma sembra una cosa difficile e strana dedurre una verità da una "riduzione all'assurdo". Si tratta, come abbiamo visto, di un procedimento che si snoda a partire da un'ipotesi falsa dalla quale trae poi conseguenze che analogamente, benché forse meno visibilmente, sono false per condurre, infine, ad un'ultima deduzione che è un assurdo evidente. Per non ritenere nella mente false proposizioni, bisognerebbe dimenticare ciascuna deduzione siffatta al piú presto, il che non è semplice, perché ogni passaggio va ricordato con precisione e chiarezza per la durata dell'intera dimostrazione.

A questo punto la critica alle dimostrazioni indirette può essere riassunta in poche parole. Affrontando una dimostrazione indiretta, si è obbligati a concentrare la propria attenzione continuamente sopra un'ipotesi falsa che andrebbe dimenticata e non sopra la tesi valida che sarebbe invece da tenere a mente.

Volendo valutare esattamente il rigore logico di obiezioni siffatte, si dovrebbe procedere ad una distinzione fra i due impieghi della "riduzione all'assurdo", come strumento di ricerca e come mezzo di esposizione, e stabilire un'analoga distinzione nei riguardi delle "dimostrazioni indirette".

Bisogna ammettere che la "riduzione all'assurdo" come mezzo di esposizione non è invero una grande consolazione. Una "riduzione" di questo tipo, soprattutto se lunga, può risultare piuttosto pesante sia per un lettore sia per un ascoltatore. Tutte le deduzioni che in essa si prendono via via in considerazione sono corrette, ma è altrettanto vero che tutte le situazioni a cui queste conducono e che si devono esaminare sono irrealizzabili. Persino l'esposizione verbale può divenire monotona se si suole insistere, come si dovrebbe proprio fare, nel ripetere che l'intero ragionamento è basato sopra un'ipotesi iniziale arbitraria; le locuzioni "per ipotesi", "per supposizione", "per pretesa" devono presentarsi con molta frequenza, oppure deve ricorrere insistentemente qualche altra espressione di identico significato. Si vorrebbe scartare e dimenticare la situazione in quanto essa non può presentarsi essendo impossibile, eppure si deve tenerla presente ed esaminarla a fondo quale base per il passaggio successivo: questo profondo contrasto può, a lungo andare, divenire insopportabile.

Invece sarebbe cosa stolta ripudiare la "riduzione all'assurdo" come strumento di ricerca. In tale veste essa può presentarsi spontaneamente e determinare una scelta quando tutti gli altri metodi sembrano inefficaci; ciò è illustrato dagli esempi precedenti.

È necessaria una certa esperienza per intuire e comprendere che non esiste alcuna antitesi essenziale fra le nostre due opinioni. L'esperienza mostra che, di solito, interviene una minima difficoltà nel trasformare una dimostrazione indiretta in un'altra diretta, oppure nel ricostruire una dimostrazione condotta mediante una laboriosa "riduzione all'assurdo" in un assetto piú aggraziato nel quale tale "riduzione all'assurdo" può persino essere eliminata (o essere ridotta, in virtú di una debita preparazione, a poche affermazioni precise).

In breve, chi voglia fare un uso completo delle proprie capacità intellettuali, dovrebbe possedere una certa familiarità sia con il metodo di "riduzione all'assurdo" che con quello di "dimostrazione indiretta". Tuttavia, quando si sia riusciti ad ottenere un risultato attraverso l'uno o l'altro di tali procedimenti, non si dovrebbe mai trascurare alla fine di porsi la solita domanda: *Si può ottenere il risultato in altro modo?*

Chiariamo ora i concetti esposti nel corso del presente articolo con qualche esempio.

5. *Nuovo assetto ad una riduzione all'assurdo.* Riprendiamo le considerazioni svolte al punto 1. La riduzione all'assurdo ivi esaminata iniziava con lo studio di una situazione che alla fine si rivelò impossibile. Tuttavia ritagliamo una parte dell'argomentazione e precisamente quella che non dipende dall'ipotesi iniziale falsa e contiene invece un'informazione esatta. Rileggendo la dimostrazione svolta in quel punto, si può intuire che almeno questa affermazione deve essere vera: Se esiste un insieme i cui elementi possano essere scritti tutti con una oppure due cifre in modo che ciascuno dei dieci simboli ricorra una, ed una sola, volta, allora la somma di tutti i numeri di quell'insieme è un numero della forma:

$$10d + (45 - d) = 9(d + 5),$$

dove d ha il significato dianzi stabilito. Si tratta dunque di un numero divisibile per 9. L'esercizio proposto imponeva, però, la condizione che tale somma fosse eguale a 100. È possibile? Evidentemente no, perché 100 non è divisibile per 9.

Ecco dunque che questa nuova esposizione della risoluzione del problema non tiene conto di quella "riduzione all'assurdo" che pure aveva condotto alla scoperta del ragionamento da seguire.

A questo proposito, notiamo che un lettore a cui sia noto il procedimento di "prova del nove" può ora vedere a colpo d'occhio la intera risoluzione.

6. *Trasformazione di una dimostrazione indiretta.* Riprendiamo le considerazioni svolte al punto 3. Rileggendo attentamente il ragionamento ivi esposto, si possono riconoscere elementi costituenti del medesimo che non dipendono da alcuna falsa ipotesi; tuttavia l'indicazione piú vantaggiosa balza ai nostri occhi quando si torni a considerare il significato del problema iniziale.

Cosa significa affermare che la successione dei numeri primi è illimitata? Evidentemente proprio questo: quando si considera un qualunque insieme di numeri primi finito, come 2, 3, 5, 7, 11, ..., P, dove P è l'ultimo numero primo finora scoperto, si è sempre condotti a riconoscere che esiste un numero primo maggiore di P. Ed allora cosa si deve fare per dimostrare l'esistenza di infiniti numeri primi? È necessario escogitare un metodo per trovare un numero primo diverso da tutti i primi che si conoscono. Quindi questo caratteristico "problema di dimostrazione" è in realtà un "problema di determinazione": *Dati i numeri primi* 2, 3, 5, 7, 11, ..., *P, determinare un nuovo numero primo N diverso da tutti quelli assegnati.* Il problema iniziale è stato quindi enunciato in una forma nuova; il passo piú importante è stato compiuto. Ed ora è relativamente facile vedere come si possano sfruttare le parti essenziali della dimostrazione eseguita precedentemente. Infatti il numero

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P) + 1$$

è senza dubbio divisibile per qualche numero primo. Si consideri quindi — questa è l'idea — un qualunque divisore primo di Q (per esempio il minore fra tutti i divisori primi di Q) e diciamo N tale numero. (Naturalmente, se Q è un numero primo, allora il problema è già risolto; infatti basta prendere $N = Q$.) È evidente che la divisione di Q per ciascuno dei numeri primi 2, 3, 5, ..., P presenta sempre un resto eguale ad 1; quindi nessuno di questi numeri può essere il numero N cercato, perché N è un divisore di Q. Ma questo è proprio ciò che volevamo: il numero N che abbiamo considerato è un numero primo e diverso da tutti quelli assegnati 2, 3, 5, 7, 11, ..., P.

La dimostrazione ora riferita individua un determinato metodo per prolungare indefinitamente la successione dei numeri primi. In essa non c'è nulla di indiretto, né deve essere considerata alcuna situazione impossibile. Eppure questa dimostrazione è sostanzialmente la stessa, indiretta, esposta precedentemente e che ora è stata cosí trasformata.

Sovrabbondante. — Si veda *Condizione.*

Problema di routine. — Problema di routine può essere detto quello di risolvere l'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ quando la risoluzione dell'equazione generale di secondo grado sia già stata spiegata e illustrata di modo che agli alunni non resti che sostituire i numeri —3 e 2 a determinate lettere che figurano nella formula risolutiva generale. Lo stesso problema potrebbe essere considerato un "problema di routine" anche se l'equazione di secondo grado non fosse stata risolta in generale, pervenendo ad una formula risolutiva letterale, purché fosse stata risolta precedentemente una mezza dozzina di equazioni di secondo grado a coefficienti numerici analoghe a quella assegnata. Insomma, comunemente si dice "problema di routine" ogni esercizio che possa essere risolto o sostituendo particolari dati nella soluzione di un problema generale già condotto a termine o seguendo passaggio per passaggio, senza alcuna manifestazione di originalità, qualche esempio appropriato particolarmente notevole. Enunciando un problema di routine, l'insegnante sventola sotto il naso dei suoi allievi una risposta immediata e sicura alla domanda: *È noto un problema connesso con questo?* Quindi agli studenti si richiedono in tale caso solo un briciolo di attenzione ed un poco di pazienza nel seguire una traccia ben definita; ovviamente non resta loro alcuna occasione di impegnare la loro intelligenza o le loro capacità inventive.

I problemi di routine, anzi molti problemi siffatti, possono essere necessari nell'insegnamento della matematica; ma proporre agli alunni unicamente esercizi di questo tipo è un errore imperdonabile. Insegnare l'esecuzione meccanica delle operazioni matematiche di routine e niente piú equivale ad uniformarsi ad un livello molto inferiore persino a quello di un manuale di ricette di arte culinaria; infatti quest'ultimo lascia sempre qualcosa all'inventiva e all'arbitrio di un cuoco, mentre le ricette di matematica non consentono mai alcun atto di libertà alla fantasia ed all'intelligenza.

Regole di scoperta. — La prima regola di scoperta è avere cervello e un po' di fortuna. La seconda regola di scoperta è non darsi per vinto e perseverare finché si trovi un'idea luminosa.

Può essere buona cosa sentirsi ripetere con rude sincerità che certe ispirazioni sono vane. Regole di scoperta infallibili che conducono alla soluzione di tutti i possibili problemi matematici sarebbero ancor piú desiderabili della pietra filosofale invano inseguita dagli alchimisti. Regole siffatte dovrebbero operare miracoli, mentre in questo campo non c'è nulla di miracoloso. Trovare regole infallibili applicabili a problemi di ogni tipo è un antico anelito filosofico, un sogno; ma questo sogno non potrà mai essere altro che un sogno.

Una ragionevole esposizione di euristica non può tendere a regole infallibili; ma essa può tuttavia tentare di studiare quei procedimenti (operazioni mentali, azioni, passaggi) che si rivelano particolarmente utili per risolvere determinati esercizi. Tali metodi sono proprio quelli impiegati da ciascuna persona saggia interessata a qualche problema. Essi sono tratteggiati da alcune domande e da alcuni suggerimenti caratteristici, che ogni solutore intelligente rivolge a se stesso ed ogni insegnante intelligente ai suoi alunni. Può essere che un elenco di domande e suggerimenti siffatti, improntati di sufficiente generalità e chiaramente ordinati, appaia meno comodo e desiderabile della pietra filosofale; ma almeno questo elenco può essere realizzato! Il nostro schema è effettivamente un elenco di tale sorta.

Regole di stile. — La prima regola di stile è avere qualcosa da dire. La seconda regola di stile è sapersi controllare, quando, per caso, si abbiano due cose da dire; se ne dica prima una e poi l'altra, non si tenti mai di esprimerle contemporaneamente.

Regole di insegnamento. — La prima regola di insegnamento è sapere ciò che si deve insegnare. La seconda regola di insegnamento è sapere un poco di piú di ciò che si deve insegnare.

Le prime nozioni vengano esposte per prime. L'autore di questo libro pensa che tutte le regole di metodo per gli insegnanti non siano del tutto inutili; in caso contrario, egli non avrebbe davvero osato scrivere un intero volume sul metodo per insegnanti e studenti. Inoltre non si deve dimenticare che un insegnante di matematica dovrebbe conoscere a fondo tale materia e, per potere indirizzare le menti degli alunni verso una corretta risoluzione dei problemi, dovrebbe avere acquistato a sua volta tale capacità di risolvere esercizi.

Si separino le varie parti della condizione. — Il primo dovere è comprendere il problema. Dopo avere compreso il problema nel suo complesso, si entra nei dettagli. Si vanno poi a considerare separatamente le varie parti principali del problema, ossia l'incognita, i dati e la condizione. Quando si sono ben assimilate queste diverse parti, se non è ancora sopraggiunta alcuna idea felice, è opportuno approfondire l'esame dei particolari. Si considerano i diversi dati, ciascuno per se stesso. E, dopo avere riguardato alla condizione come ad un tutto unico, *si separano le varie parti* di essa e si prende in considerazione ciascuna di queste indipendentemente dalle altre.

Ora appare chiaro il ruolo del suggerimento che abbiamo qui preso in esame. Esso mira a provocare un passaggio che va completato quando si stia tentando di vedere distintamente un problema e si debba procedere alla considerazione di dettagli sempre piú minuziosi. È un passaggio fondamentale nel processo di *Scomporre e ricomporre.*

Si separino le varie parti della condizione. Si possono scrivere separatamente? Si presenta spesso l'occasione di chiedersi cosí quando si debba *Stabilire un'equazione.*

Stabilire un'equazione. — Si tratta di un processo analogo a quello di tradurre da una lingua in un'altra (v. *Notazione*, 1). Questo paragone, impiegato da Newton nella sua *Arithmetica Universalis*, può servire a spiegare certe difficoltà avvertite spesso sia dagli insegnanti sia dagli studenti.

1. Stabilire un'equazione significa esprimere in simboli matematici una condizione enunciata a parole; si tratta di una traduzione dal linguaggio ordinario nel linguaggio delle formule matematiche. Le difficoltà che si possono incontrare nello stabilire un'equazione sono sostanzialmente difficoltà di traduzione.

Per esempio, per tradurre una frase dall'italiano in francese, sono necessarie due cose. In primo luogo, si deve comprendere a fondo il significato della frase italiana. Secondariamente, si deve possedere una profonda conoscenza delle forme di espressione caratteristiche della lingua francese. Una situazione molto simile si manifesta quando ci si sforzi di esprimere in simboli matematici una condizione enunciata a parole. In primo luogo, si deve comprendere a fondo il significato della condizione. Secondariamente, si deve possedere una profonda conoscenza delle forme di espressione caratteristiche della matematica.

Una frase italiana è relativamente facile da tradurre in francese quando si possa procedere ad una traduzione parola per parola ma ci sono frasi idiomatiche nella lingua italiana che non possono davvero essere tradotte in questo modo. La traduzione di una frase che presenti locuzioni idiomatiche è irta di difficoltà; in un caso del genere, è necessario dedicare minore attenzione ai vocaboli singoli e moltissima al significato dell'intera proposizione; prima di procedere alla traduzione vera e propria di una frase di questo tipo, può accadere persino di dover pensare ad una diversa forma possibile della medesima.

Stabilire un'equazione è un compito perfettamente analogo. Nei casi piú semplici, la proposizione espressa a parole si spezza naturalmente in piú parti, ciascuna delle quali è suscettibile di potere essere subito tradotta in simboli matematici. Nei casi piú complessi, la condizione è costituita da parti che non sono invece suscettibili di un'immediata trascrizione in linguaggio simbolico. Allora bisogna concentrare la propria attenzione non tanto sulle singole parole dell'enunciato quanto sul significato di esso e, prima di scrivere delle formule, è necessario conferire alla condizione una nuova forma; mentre cosí si procede, si dovrebbe intanto non perdere di vista le risorse delle notazioni di matematica.

In ogni caso, facile o complicato che esso sia, si deve ben comprendere la condizione, per *separare le varie parti* di essa e chiedersi: *Si possono scrivere queste separatamente?* Nei casi semplici, si riesce senza incertezza a dividere la condizione in parti che possono essere trascritte in simboli matematici; in quelli complessi, l'opportuna divisione in parti della condizione è meno immediata ed ovvia.

Sarà bene rileggere le considerazioni esposte nelle righe precedenti dopo la lettura dei seguenti esempi.

2. *Determinare due numeri la cui somma sia eguale a* 78 *ed il cui prodotto sia eguale a* 1296.

Dividiamo in due la pagina con una riga verticale. A sinistra, scriviamo la proposizione espressa a parole e divisa in parti convenienti; a destra, scriviamo i simboli algebrici, allineati con la parte di enunciato cui essi corrispondono ordinatamente. Ciò equivale a trascrivere a sinistra il testo originale e a destra la traduzione simbolica.

Enunciato del problema

in linguaggio ordinario	*in linguaggio simbolico*
Determinare due numeri	x, y
la cui somma sia eguale a 78	$x + y = 78$
il cui prodotto sia eguale a 1296	$x \cdot y = 1296.$

In questo caso, l'enunciato a parole si fraziona del tutto spontaneamente in parti, ciascuna delle quali è suscettibile di una trascrizione immediata in simboli matematici.

3. *Si determinino le misure della larghezza e dell'altezza di un prisma retto a base quadrata, conoscendo il volume del solido,* 63 cm^3, *e l'area della sua superficie totale,* 102 cm^2.

Quali sono le incognite? La misura dello spigolo di base e quella dell'altezza del prisma; indicheremo tali incognite rispettivamente con x ed y.

Quali sono i dati? La misura del volume, 63, e quella della superficie totale, 102, del solido.

Qual è la condizione? Il prisma retto a base quadrata considerato, il cui spigolo di base e la cui altezza, in centimetri, misurano rispettivamente x ed y, deve avere volume eguale a 63 cm^3 e area della superficie totale eguale a 102 cm^2.

Si separino le varie parti della condizione. Ci sono due parti, l'una relativa al volume e l'altra all'area della superficie totale del solido.

Non vi può essere molta incertezza nel dividere l'intera condizione esattamente nelle due parti suddette, ma queste non possono essere trascritte immediatamente. È necessario sapere come calcolare il volume e l'area della superficie totale e delle diverse porzioni di superficie del solido in questione. Tuttavia, conoscendo un poco di geometria, si può facilmente esprimere in altra forma entrambe le parti della condizione, in modo da rendere piú agevole la loro traduzione in equazioni. Sul lato sinistro della pagina scriviamo allora l'enunciato del problema convenientemente modificato; esso diverrà forse piú lungo, ma senz'altro piú atto a essere tradotto immediatamente in linguaggio simbolico.

Di un prisma retto a base quadrata determinare la misura dello spigolo di base	x
e la misura dell'altezza.	y
In primo luogo è dato il volume.	63
La misura dell'area della base, che è un quadrato il cui lato misura x, e	x^2
la misura dell'altezza	y
individuano la misura del volume, prodotto delle due precedenti.	$x^2 y = 63$
In secondo luogo è data l'area della superficie totale.	102
L'area della superficie totale del solido è la somma di quella di due quadrati il cui lato misura x cm	$2x^2$
e di quella di quattro rettangoli aventi base eguale a x cm e altezza eguale a y cm;	$4xy$
quindi saranno eguali le misure della prima superficie e la somma delle misure delle altre parti.	$2x^2 + 4xy = 102.$

4. *Essendo dati, in un piano e con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali prefissato su di esso, l'equazione di una retta e le coordinate di un punto, determinare il punto simmetrico di questo rispetto a tale retta.*

È un problema di geometria analitica piana.

Qual è l'incognita? Un punto, le cui coordinate indicheremo con p, q.

Quali sono i dati? Una retta di equazione, per esempio, $y = mx + n$, ed un punto di coordinate a, b.

Qual è la condizione? I punti (a, b) e (p, q) sono simmetrici rispetto alla retta $y = mx + n$.

A questo punto notiamo l'intrinseca difficoltà di dividere l'attuale condizione in parti, ciascuna delle quali traducibile nel linguaggio della geometria analitica. La natura di tale difficoltà è facile da comprendere. Una scomposizione della condizione in parti può essere rigorosa dal punto di vista logico, ma inefficace per l'uso che se ne deve fare. È qui indispensabile ottenere delle parti suscettibili di trascrizione analitica e, per conferire all'enunciato un simile assetto, è necessario *ricorrere alla definizione* di simmetria senza perdere intanto di vista i vantaggi propri della geometria analitica. Cosa si intende per simmetria rispetto ad una retta? Quali relazioni geometriche possono essere espresse molto semplicemente ricorrendo alla geometria analitica? Fissiamo l'attenzione sulla prima di queste domande, ma non dimentichiamo la seconda. Allora finalmente è possibile individuare la scomposizione piú opportuna che riportiamo qui sotto.

Il punto dato	(a, b)
e il punto richiesto	(p, q)
sono cosí legati che,	
in primo luogo, la retta che li congiunge	
è perpendicolare alla retta assegnata e,	$\frac{q-b}{p-a} = -\frac{1}{m}$
secondariamente, il punto medio	
del segmento che li unisce giace sulla retta assegnata.	$\frac{b+q}{2} = m\frac{a+p}{2} + n.$

Sintomi di progresso. — Colombo ed i suoi compagni, mentre veleggiavano verso occidente sopra un oceano sconosciuto, si sentirono incoraggiati alla vista di uno stormo di uccelli che parve loro un fausto auspicio, la promessa di una terra non troppo lontana. Ma, dopo tanti disinganni, essi cercarono di scoprire altri segni. Pensarono che le alghe marine galleggianti, o i bassi banchi di nubi, potessero indicare che la terra era ormai prossima; ma si ingannavano di nuovo. Tuttavia, un giorno, i sintomi di progresso si moltiplicarono. Un giovedí, e precisamente l'11 ottobre 1492, "essi videro galleggiare accanto alle fiancate delle caravelle canne e giunchi verdi. L'equipaggio della *Pinta* scorse un bastone ed un timone di carro e riuscí a trarre a bordo dai flutti un'altra piccola stanga che sembrava lavorata con strumenti di ferro; poi un altro pezzo di legno, un arbusto ed un'assicella. Anche la ciurma della *Niña* scoprí tracce di terra ed un rametto carico di bacche. Ciascuno, a questi segni, si sentí rivivere e gioí." Infatti, il giorno seguente, quei naviganti avvistarono la terra, la prima isola del Nuovo Mondo.

Si tratti di un'impresa notevole, oppure no, qualunque sia il tipo di problema che ci si prefigge di risolvere, ogni qual volta ci si applica intensamente, si attendono sintomi di progresso con la medesima ansiosa speranza con cui Colombo ed i suoi compagni attesero i segni di una terra vicina. Considereremo qui alcuni esempi atti a fare comprendere cosa può essere logico ritenere un sintomo di progresso verso la soluzione.

1. *Esempi.* Si abbia un problema di scacchi e si debba dare scacco matto al re nero in due mosse. Sulla scacchiera il re bianco può eseguire, supponiamo, due mosse; un alfiere bianco si trova piuttosto lontano dal re nero e quindi sembra inutilizzabile. A cosa può servire dunque questa pedina? È necessario lasciare in sospeso la risposta a questa domanda per un poco. Però, dopo vari tentativi, si scopre una nuova mossa e si nota che quell'alfiere bianco apparentemente superfluo dovrebbe entrare in gioco. Da questa osservazione, nasce una nuova speranza; la si interpreta come un sintomo positivo: quella nuova mossa è probabilmente esatta. Perché?

In un problema di scacchi ben costruito, nessuna pedina è inutile. Quindi vanno considerate tutte le pedine disposte sulla scacchiera; *si devono usare tutti i dati.* La soluzione esatta fa certamente entrare in gioco tutti i pezzi, quindi anche quell'alfiere bianco che, a prima vista, sembrava in piú. Sotto questo aspetto, la nuova mossa che si è immaginata è conforme con quella corretta che si cerca. Essa assomiglia a quella esatta; anzi, potrebbe essere proprio quella che porta alla soluzione del problema.

È interessante considerare un'analoga situazione relativa a un problema di matematica. Si debba ora esprimere la misura dell'area di un triangolo in funzione delle misure dei tre lati, ossia di

a, b, c. È già stato compilato un certo piano. Di sicuro, si sa, in modo piú o meno preciso, quali relazioni geometriche vadano considerate e quale specie di calcoli vada eseguita. Ma non è ancora certo se tale piano sarà davvero efficace. Ora, se nel seguire il filo conduttore del piano prestabilito, si osserva che nell'espressione dell'area cercata interviene la quantità

$$\sqrt{b + c - a},$$

allora si ha il diritto di sentirsi rincuorati. Perché?

Infatti bisogna tenere presente che la somma di due lati qualsiasi di un triangolo è maggiore del rimanente lato; questa circostanza implica una certa limitazione relativa alle misure dei tre lati. Precisamente, a, b e c non possono essere scelti in modo del tutto arbitrario; ma, per esempio, $b + c$ deve essere maggiore di a. Si tratta di una parte essenziale della condizione e *si deve tenere conto dell'intera condizione*. Se $b + c$ non dovesse essere maggiore di a, la formula ottenuta non sarebbe assolutamente valida. Ora, la radice quadrata scritta piú sopra diviene un numero immaginario se $b + c - a$ è un numero negativo — cioè se $b + c$ è minore di a — e pertanto essa si rivela in tale caso inadeguata a rappresentare un numero reale proprio in quelle circostanze in cui l'espressione che si sta considerando è obbligata a non essere piú valida. Quindi la formula nella quale compare tale radice quadrata ammette una notevole proprietà in comune con la formula esatta dell'area richiesta dal problema. Tale formula, cui si è fissata la mente del risolutore, assomiglia a quella esatta; anzi, potrebbe essere proprio quella corretta.

Un altro esempio. Tempo fa, volevo dimostrare un teorema di geometria solida. Senza troppa fatica, trovai una prima osservazione che sembrava pertinente a quell'argomento; ma poi mi arenai. La dimostrazione non era completa. Dopo un giorno di applicazione, avevo conseguito una piú netta visione sul modo in cui avrebbe dovuto procedere la dimostrazione e su quello in cui avrebbe dovuto essere colmata la lacuna; ma non riuscii a completare il mio ragionamento. Il giorno successivo, dopo il riposo di una notte, ripresi lo studio di quella questione e tosto scorsi una straordinaria analogia fra il mio attuale teorema ed un altro di geometria piana. Fulmineamente mi resi conto di tenere in pugno la soluzione e, a mio avviso, avevo un valido motivo per sentirmi cosí soddisfatto e fiducioso. Perché?

Infatti l'*analogia* è un'ottima guida. La risoluzione di un problema di geometria solida dipende spesso da quella di un problema analogo di geometria piana (v. *Analogia*, 3-7). Cosí, nel mio caso, fin dall'inizio c'era una forte probabilità che per la dimostrazione cui anelavo potesse rivelarsi utilissimo come lemma qualche teorema di geometria piana, proprio appartenente a quel gruppo di proposizioni che vengono subito alla mente. Ragionai cosí: "Questo teorema assomiglia al lemma di cui ho bisogno; questo teorema potrebbe essere proprio quel lemma."

Colombo ed i suoi uomini, se si fossero sobbarcati la fatica di ragionare esplicitamente, avrebbero svolto un ragionamento non troppo dissimile dal seguente. Essi conoscevano l'aspetto del mare in prossimità di una costa. Sapevano che gli uccelli sorvolano i flutti che circondano da vicino una terra in quantità molto maggiore che non il mare aperto e che, nelle vicinanze di coste, le onde contengono spesso oggetti spazzati via dalle sponde. Molti avranno certo osservato tutto ciò rientrando in un porto dopo una traversata. Il giorno precedente quella memorabile data, in cui le tre caravelle raggiunsero l'isola di San Salvador, nel vedere che gli oggetti trascinati dalle onde divenivano sempre piú numerosi, Colombo dovette pensare: "È come se ci si stesse avvicinando a qualche terra; è possibile che stiamo proprio per arrivare a qualche lido." E ciascuno si sentí rivivere e gioí.

2. *Il carattere euristico dei sintomi di progresso.* Ci sia permesso di insistere sopra una circostanza che forse è risultata già evidente al lettore; ma essa è molto importante e quindi va completamente chiarita.

Il tipo di ragionamento illustrato dagli esempi che abbiamo presentato è degno di nota e merita di essere preso in seria considerazione anche se esso è fondato soltanto sopra un'indicazione plausibile e non su di un'assoluta certezza. Riprendiamo dunque uno di quei ragionamenti ed esprimiamolo di nuovo, analizzandone ora minuziosamente i dettagli:

> Quando ci si avvicina a terra, spesso si vedono uccelli.
> Ora si vedono numerosi uccelli.
> Quindi, probabilmente, ci si sta avvicinando a terra.

Senza l'avverbio "probabilmente" la conclusione potrebbe risultare scorretta. Infatti Colombo ed i suoi compagni videro numerosi uccelli molte volte, ma ogni volta rimasero delusi. Invece, poi, giunse effettivamente un giorno in cui essi videro degli uccelli e quel giorno era la vigilia della scoperta del Nuovo Mondo.

Con l'avverbio "probabilmente" la conclusione si presenta invece logica e spontanea; tuttavia essa non equivale affatto ad una dimostrazione, ad una rigorosa deduzione: è soltanto un'indicazione, una congettura euristica. Sarebbe un grave errore dimenticare che una conclusione siffatta è soltanto probabile e ritenerla sicura. Ma sarebbe un errore forse ancora piú grave non tenerne alcun conto. Considerando una conclusione euristica come una prova certa, si rischia di essere derisi e delusi; ma, trascurando completamente una conclusione di questo tipo, non si compierà mai alcun progresso. Tutti i piú importanti sintomi di progresso sono di natura euristica. Si deve confidare in essi? Si deve seguirli? Sí, essi vanno seguiti; ma si seguano tenendo gli occhi bene aperti. Si deve dare loro credito, ma avvedutamente. E non si rinunci mai ad usare il proprio cervello!

3. *Sintomi suscettibili di una chiara esposizione.* Gli stessi esempi considerati poco fa possono essere esaminati da un altro punto di vista.

Proprio nel primo dei suddetti esempi, considerammo un sintomo positivo l'essere riusciti a fare entrare in gioco un dato non utilizzato fino a quel momento, ossia l'alfiere bianco. La nostra valutazione era davvero esatta. Infatti, la risoluzione di un problema consiste essenzialmente nello *scoprire le relazioni che intercedono fra i dati e l'incognita.* Inoltre, almeno quando si stia risolvendo un problema enunciato come si deve, è necessario *fare uso di tutti i dati,* legando opportunamente all'incognita ciascuno di essi. Quindi fare entrare in gioco un altro dato va effettivamente interpretato come un progresso, un passo innanzi.

Nel secondo esempio, interpretammo come sintomo propizio la circostanza che la nostra formula risultasse conforme ad una clausola essenziale della condizione. Di nuovo una valutazione corretta. Infatti si deve *tenere conto dell'intera condizione.* Quindi prendere in considerazione un'altra parte di condizione va ritenuto un effettivo progresso, una mossa nella direzione esatta.

E nel terzo esempio, infine, interpretammo come sintomo positivo il presentarsi di un problema analogo piú semplice. Anche questa volta si può dare una giustificazione. Infatti l'analogia è una delle fonti piú rigogliose di scoperta. Quando ogni altro metodo fallisce, si dovrebbe sempre *pensare ad un problema analogo.* Pertanto, se un problema siffatto scaturisce spontaneamente e in modo del tutto naturale, è logico sentirsi rincuorati; si comprende di essere prossimi alla soluzione.

Dopo avere cosí contemplato questi esempi, si può da essi ricavare facilmente un concetto generale. Ci sono certe operazioni mentali particolarmente utili nella risoluzione dei problemi. (In questo volumetto sono menzionate le piú comuni operazioni del genere.) Quando un'operazione siffatta si rivela efficace (se un altro dato si presenta connesso all'incognita, se viene presa in considerazione una clausola piú restrittiva della condizione, se si può fare ricorso ad un problema analogo piú semplice), il risultato che ne deriva va interpretato come un sintomo di progresso. Avendo ben chiarito questo punto essenziale, ora possiamo descrivere con una certa precisione la natura di altri sintomi di progresso. A tale scopo, basta scorrere il nostro schema ed esaminare le domande ed i suggerimenti in esso contenuti da un nuovo punto di vista.

Cosí significa progresso la completa comprensione del problema e, specialmente, della natura dell'incognita. Significa progresso anche la realizzazione di una precisa disposizione dei dati secondo la quale difficilmente uno qualunque di essi possa venire trascurato per dimenticanza. Costituisce un passo innanzi essenziale una netta visione della condizione nel suo complesso; e può essere un progresso importante il separare le varie parti della condizione in modo conveniente. Quando sia stata trovata una figura facile da visualizzare, oppure una notazione semplice da ricordare, è ragionevole credere di avere compiuto un certo progresso. Ricordare un *problema connesso con quello proposto e risolto precedentemente* può essere una mossa decisiva nella giusta direzione.

E cosí si potrebbe continuare. Ad ogni operazione mentale chiaramente concepita corrisponde un ben determinato sintomo, suscettibile di una chiara esposizione. Il nostro schema, interpretato in modo conveniente, può essere riguardato anche come un elenco di sintomi di progresso.

Ora, le domande ed i suggerimenti del nostro schema sono semplici, ovvi, conformi alle manifestazioni del senso comune. Piú volte abbiamo avuto l'occasione di ripetere ciò e lo stesso può dirsi dei corrispondenti sintomi di progresso che abbiamo qui analizzato. Per interpretare tali sintomi non è necessario conoscere alcuna scienza occulta; basta un briciolo di buon senso e, naturalmente, un poco d'esperienza.

4. *Sintomi suscettibili di un'esposizione meno chiara.* Quando ci si applica intensamente ad un problema, avvertiamo le minime variazioni di velocità del progresso; se esso procede rapidamente, ci si esalta e, se lentamente, ci si abbatte. Si percepisce in modo perfettamente limpido tale variazione, anche senza riuscire a di-

stinguere alcun sintomo preciso. Istinto, sensazioni, aspetti generici della situazione contribuiscono a segnalare il progresso; ma essi non sono facilmente esprimibili. "Mi pare giusto", oppure "Non deve proprio essere esatto", dice chi è sincero. Quelli meno semplici e spontanei si esprimono con maggiore diplomazia: "È un piano ben equilibrato", oppure "No, manca qualcosa e ciò turba l'armonia dell'insieme." Anche nelle espressioni laconiche o scarne è tuttavia contenuta una inequivocabile sensazione alla quale ci si abbandona fiduciosi e che porta frequentemente sul dritto cammino. Quando una siffatta intuizione è molto intensa e scaturisce all'improvviso, si parla di ispirazione. In generale, siamo poco propensi a dubitare delle nostre ispirazioni e talvolta esse ci deludono. Infatti dovremmo considerare queste sensazioni ed ispirazioni proprio alla stessa stregua dei sintomi di progresso, suscettibili di una piú chiara esposizione, dianzi esaminati. Anche in questo caso esse vanno seguite, ma tenendo gli occhi ben aperti.

Si seguano sempre le proprie ispirazioni — con un pizzico di perplessità.

[Qual è la natura di tali sensazioni? Sotto le locuzioni di una certa potenza estetica, quali "ben equilibrato" ed "armonia dello insieme" si cela qualcosa, qualche significato, meno vago? Tali domande hanno un carattere piú speculativo che pratico, ma proprio il nostro sviluppo fornisce loro risposte che forse meritano di essere riferite esplicitamente. Poiché i sintomi di progresso sono intimamente connessi con il successo oppure con il fallimento derivante dall'applicazione di certe operazioni mentali definite in modo abbastanza preciso, si può sospettare che anche le sensazioni esprimibili meno esattamente siano in modo analogo strettamente legate ad altre attività mentali piú recondite — forse ad attività la cui natura è piú "psicologica" e meno "logica".]

5. *L'ausilio dei sintomi di progresso.* Si abbia un certo piano e si veda abbastanza chiaramente come iniziare la risoluzione di un problema proposto e quali passaggi eseguire per primi. Però ancora non sia noto il tracciato del cammino da compiere in seguito; non si sia, cioè, del tutto sicuri dell'efficacia del piano e, comunque, resti molto da fare ancora. Quindi, in un caso del genere, ci si incammina cautamente nella direzione indicata dal piano e si cominciano a cercare sintomi di progresso. Se questi sono rari oppure indistinti, si diviene piú esitanti e, se dopo un certo tempo nessuno di essi si manifesta, ci si scoraggia; allora si torna da capo e si tenta un'altra strada. Invece, se i sintomi di progresso

sono sempre piú frequenti a mano a mano che si procede e se essi si moltiplicano, l'esitazione iniziale svanisce, l'entusiasmo si accresce e si avanza con fiducia sempre maggiore, proprio come fecero Colombo e i suoi compagni poco prima di avvistare l'isola di San Salvador.

I sintomi di progresso possono guidare le nostre azioni. La loro mancanza può evitarci di entrare in un vicolo cieco e risparmiarci perdita di tempo in tentativi vani; la loro presenza può indurci a concentrare la nostra attenzione sul punto esatto.

Ma i sintomi possono essere anche ingannevoli. Una volta io abbandonai un certo sentiero per mancanza di sintomi di progresso, ma un tale, che mi seguiva lungo quel medesimo cammino, poco dopo fece un'importante scoperta — con mio grande disappunto e profondo rincrescimento. Quel tale non solo ebbe piú costanza di me, ma seppe anche interpretare esattamente un determinato sintomo che io invece avevo trascurato. Ma può accadere, alle volte, di seguire una via allegramente, incoraggiati da un sintomo favorevole, e di correre incontro ad un ostacolo imprevisto ed insuperabile.

Insomma, questi sintomi possono portare fuori strada in qualche caso sporadico, ma nella maggioranza delle situazioni indirizzano esattamente. Un cacciatore può qualche volta confondersi nel riconoscere le tracce della preda che sta inseguendo, ma ciò non gli accade in generale, altrimenti egli non potrebbe vivere della caccia.

Ci vuole esperienza per interpretare i sintomi in modo corretto. Certo qualche compagno di Colombo sapeva per esperienza come appaiono le onde in prossimità di un lido e quindi riuscí a riconoscere i sintomi che inducevano a sperare in una terra ormai prossima. Un esperto matematico sa per esperienza come si presenta la situazione quando la soluzione è vicina, lo sente per istinto; egli quindi è in grado di riconoscere i sintomi che lo avvertono che è ormai giunto alla meta. Un esperto matematico conosce piú sintomi di un principiante e li conosce piú a fondo; questa conoscenza costituisce forse il suo principale vantaggio. Proprio come un cacciatore esperto non solo si accorge delle orme di una possibile preda, ma sa valutare se esse sono recenti oppure no, anche quando un principiante non vede proprio nulla.

Il maggiore vantaggio di cui gode chi sia dotato di un'intelligenza eccezionale può essere una specie di straordinaria sensibilità mentale. Con la sua acutissima sensibilità, egli avverte i piú tenui sintomi di progresso, oppure nota la loro assenza, quando colui che possiede meno talento è incapace di osservare qualcosa di diverso.

[6. *Sillogismo euristico.* Nel punto 2 di questo medesimo paragrafo accennammo ad un processo di ragionamento euristico che merita ulteriori considerazioni ed un nome specifico. Inizieremo esponendo quel ragionamento come segue:

> Quando ci si avvicina a terra, spesso si vedono uccelli.
> Ora si vedono numerosi uccelli.
>
> ---
>
> Quindi diviene piú plausibile la supposizione che ci si stia avvicinando a terra.

Le due proposizioni scritte sopra la riga orizzontale possono dirsi *premesse*, quella scritta sotto *conclusione.* L'intero ragionamento può essere denominato *sillogismo euristico.*

Le premesse qui avanzate sono identiche a quelle che furono poste al punto 2; la conclusione, invece, è qui espressa con maggiore precisione. Colombo ed i suoi uomini, fin dall'inizio del loro viaggio, avevano pensato di pervenire ad una terra navigando sempre verso occidente; ed essi dovevano essere convinti di questa congettura, altrimenti non sarebbero certo partiti. Durante la traversata, riferirono ogni circostanza, ogni situazione, piú o meno notevole, alla loro domanda dominante: "Stiamo avvicinandoci a terra?" La loro fiducia dovette crollare e risorgere ad ogni sintomo di alterno significato e, naturalmente, la fede di ogni membro dell'equipaggio vacillò piú o meno profondamente secondo le circostanze ed il carattere. Tutta l'immane, drammatica tensione creatasi negli animi di quei naviganti durante la traversata può essere attribuita proprio a questa continua variazione di fiducia.

Il sillogismo euristico dianzi riportato rivela un fondamento logico per una variazione di livello di fiducia. Il ruolo essenziale di un ragionamento di questo tipo è determinare simili variazioni e ciò risulta ora molto piú chiaro di quanto apparisse nel precedente punto 2.

Lo schema generale suggerito dal nostro esempio particolare può essere riassunto cosí:

> È noto che, se A è vero, allora anche B è vero.
> Ora risulta che B è vero.
>
> ---
>
> Quindi A diviene piú credibile.

Oppure, in forma ancora piú breve:

$$\frac{\text{Se vale } A\text{, allora vale } B. \quad B \text{ vale.}}{A \text{ è piú credibile.}}$$

In quest'ultima disposizione, la riga orizzontale fra le premesse e la conclusione sostituisce il "quindi" e sta ad indicare l'implicazione, ossia il legame essenziale fra le premesse e la conclusione.]

[7. *Natura di un ragionamento plausibile.* In questo volumetto, abbiamo voluto prendere in esame una questione di natura filosofica. Ne discutiamo come ci è consentito a questo livello: da un punto di vista pratico, alla buona, in termini che non pretendono affatto di essere confusi con modi d'esposizione o d'espressione intellettuali; ciò non toglie che si tratti di un argomento filosofico. Esso si riferisce alla natura del ragionamento euristico e, per estensione, ad un tipo di ragionamento che, pur essendo importante, non è una dimostrazione e che noi chiameremo, in mancanza di una denominazione piú appropriata, ragionamento *plausibile.*

I sintomi che convincono l'inventore che la sua idea è buona, le indicazioni che guidano ciascuno di noi nel disbrigo dei propri impegni giornalieri, le prove indiziarie indirette di un avvocato, l'evidenza per induzione dello scienziato, l'evidenza delle statistiche alle quali si appellano tante e cosí distinte materie — tutti questi tipi di evidenza hanno caratteristiche essenziali in comune. In primo luogo essi non forniscono la certezza che dà invece una dimostrazione rigorosa. Secondariamente essi sono utili a procacciare una conoscenza completamente nuova e persino indispensabile per qualunque conoscenza, non necessariamente di matematica pura o di logica o connessa con il mondo fisico. Potremmo chiamare il ragionamento che mette in risalto questo genere di evidenza "ragionamento euristico", oppure "ragionamento induttivo", oppure (volendo evitare un abuso del significato di termini già coniati) "ragionamento plausibile". Noi adotteremo quest'ultima denominazione.

Il sillogismo euristico dianzi introdotto può essere considerato come il piú semplice ed il piú comune schema di ragionamento plausibile. Esso ci fa ricordare un classico processo di dimostrazione detto "modus tollens di sillogismo ipotetico". Schematizziamo qui entrambi questi metodi:

Sillogismo dimostrativo	*Sillogismo euristico*
Se A vale, allora vale B.	Se A vale, allora vale B.
B falso.	B vero.
A falso.	A piú credibile.

Può essere istruttivo un confronto fra questi due schemi di ragionamento. Ciò consente di ottenere una profonda comprensione, difficilmente perseguibile in altro modo, della natura del ragionamento plausibile (euristico induttivo).

La prima premessa è identica in entrambi:

Se A vale, allora vale B.

Essi differiscono nella seconda premessa. Le proposizioni

B falso $\qquad\qquad$ B vero

sono l'una contraria dell'altra, ma presentano una "natura logica simile", stanno su un medesimo "livello logico" La vera differenza si verifica dopo la seconda premessa. Le conclusioni

A falso $\qquad\qquad$ A piú credibile

stanno su livelli logici distinti e le relazioni dalle quali esse risultano legate alle rispettive premesse sono di natura logica diversa.

La conclusione del sillogismo dimostrativo è della medesima natura logica delle premesse. Inoltre tale conclusione è completamente determinata e giustificata dalle premesse. Se due persone sono d'accordo nell'accettare le premesse, le due medesime persone non possono, per quanto diversi siano i loro gusti e le loro convinzioni, non essere d'accordo anche circa la conclusione.

La conclusione del sillogismo euristico, invece, differisce dalle premesse per la natura logica; essa è piú vaga, non è affatto precisa, è meno completamente determinata. Questa conclusione può essere paragonata ad una forza, perché come una forza ha direzione e intensità. Ci spinge in una certa direzione: A diviene *piú* credibile. E possiede anche una certa intensità: A può divenire *molto* piú credibile, oppure *poco* piú credibile. Si tratta di una conclusione che non è completamente determinata e giustificata dalle premesse. *La direzione è avvalorata e giustificata dalle premesse, l'intensità no.* Per ciascuna persona ragionevole, le premesse implicano che A diventi piú credibile (certamente non meno credibile); tuttavia due persone diverse possono sicuramente dissentire sul *quanto* piú credibile divenga *A*, perché i loro temperamenti, i loro punti di vista e le loro opinioni possono essere molto differenti.

Nel sillogismo dimostrativo, le premesse costituiscono il *solido fondamento* sul quale si erige la conclusione. Se valgono entrambe le premesse, vale anche la conclusione. Ogni ulteriore informazione che non determini alcun mutamento circa la validità delle premesse lascia inalterata anche la conclusione.

Nel sillogismo euristico, le premesse costituiscono solo una *parte del fondamento* sul quale si erige la conclusione, la parte completamente enunciata, la parte "visibile"; ma esiste un'altra parte invisibile, implicita, formata da qualcosa di piú, forse da sensazioni indistinte, oppure da cause indeterminate. Infatti può avvenire che qualche ulteriore informazione non alteri le premesse, ma influisca sulla validità che attribuiamo ad *A* in senso contrario a quello espresso nella conclusione. Considerare *A* piú plausibile in virtú delle premesse di un sillogismo euristico è l'unica cosa ragionevole e lecita. Infatti è sempre possibile trovare argomenti, che non interferiscono affatto con le premesse, atti a far sembrare subito *A* meno plausibile oppure del tutto inammissibile. La conclusione può vacillare e persino crollare per qualche scompiglio nelle parti invisibili del suo fondamento, anche se le premesse, che del medesimo costituiscono la parte visibile, continuano a restare valide.

Queste osservazioni rendono un poco piú comprensibile la natura del sillogismo euristico e di ogni altro tipo di ragionamento plausibile, ma non di quello dimostrativo; quest'ultimo tipo di ragionamento si rivela sconcertante e deludente, se esaminato dal punto di vista rigoroso della logica delle dimostrazioni. Per completare questo studio appaiono necessari numerosi esempi concreti, la considerazione di altri tipi di sillogismo euristico, un'indagine circa il concetto di probabilità e varie nozioni connesse; si consiglia il lettore di leggere, a questo proposito, lo scritto *Mathematics and Plausible Reasoning* (*Matematica e ragionamento plausibile*) dello stesso autore.]

Le argomentazioni euristiche sono importanti anche se non dimostrano proprio nulla. Infatti è utilissimo proprio cercare di chiarire congetture siffatte, anche se sotto ciascuna di esse e sotto ogni concetto reso piú chiaro se ne celano molti altri che restano oscuri pur essendo, forse, proprio i piú notevoli.

Particolarizzazione. — Si tratta del passaggio dalla considerazione di un dato insieme di enti a quella di un insieme meno ampio, oppure di un insieme costituito da un unico elemento. La particolarizzazione si rivela talvolta molto utile, nella risoluzione dei problemi.

1. *Esempio.* Siano r, R ed H le misure, rispetto ad un'unità di misura di lunghezza prefissata, rispettivamente del raggio della circonferenza inscritta, del raggio della circonferenza circoscritta e della massima fra le tre altezze di un triangolo. Allora:

$$r + R \leqslant H.$$

Dobbiamo dimostrare la validità (oppure la falsità) di questo teorema;[8] dobbiamo risolvere un "problema di dimostrazione".

Il teorema proposto è di tipo poco comune. È difficile pensare a qualche teorema sui triangoli che presenti una tesi analoga. Se non si ha alcun'altra idea, si può esaminare qualche *caso particolare* di questo enunciato poco noto. Ora, il triangolo particolare piú famoso è quello equilatero, per il quale si ha:

$$r = \frac{H}{3} \qquad \text{e} \qquad R = \frac{2H}{3};$$

quindi si vede immediatamente che, in questo caso, il teorema è vero.

Se di nuovo non si hanno altre idee, si può verificare nel *caso particolare piú ampio* relativo ai triangoli isosceli. La forma di un triangolo isoscele dipende dall'ampiezza dell'angolo al vertice e si presentano due casi limite; quello in cui l'angolo al vertice misura 0° e quello in cui esso misura 180°. Quando si verifica la prima circostanza, la base del triangolo isoscele si riduce ad un punto e manifestamente si ottiene:

$$r = 0 \qquad \text{e} \qquad R = \frac{H}{2};$$

quindi resta provato anche qui l'enunciato. Nella seconda configurazione limite, invece, svaniscono le tre altezze e ne segue che

$$r = 0, \qquad R = \infty, \qquad H = 0.$$

In questo caso l'enunciato non vale piú. Resta allora dimostrata la falsità del teorema proposto ed il problema è cosí risolto.

[8] Cfr. "American Mathematical Monthly" vol. 50 (1943), p. 124 e vol. 51 (1944), pp. 234-236.

Comunque è evidente che l'enunciato è falso anche nel caso di triangoli isosceli il cui angolo al vertice abbia ampiezza molto prossima a 180°; quindi possiamo "ufficialmente" omettere lo studio del caso limite che non sembra del tutto "ortodosso".

2. "L'eccezione conferma la regola." "L'eccezione dimostra la regola." Questi noti proverbi vanno presi non alla lettera, bensí come una scherzosa presa in giro della debolezza di un certo tipo di logica. Se consideriamo seriamente le questioni, è sufficiente una sola eccezione, naturalmente, per dimostrare la non validità di un'eventuale regola oppure di un generico enunciato. Il metodo piú comune e, sotto certi aspetti, piú conveniente per rifiutarsi di accettare un'affermazione come vera è proprio quello di presentare un ente al quale essa non si adatti; un simile ente è detto da qualche autore *controesempio.*

Supponiamo di avere una certa proposizione che si riferisca ad un certo insieme di enti; per confutare la validità di tale affermazione, la *particolarizziamo*, estraiamo da quell'insieme di enti un elemento per il quale essa non è vera. L'esempio precedente, riferito al punto 1, illustra il modo in cui si opera. Si può esaminare prima qualche caso particolare, ossia fissare l'attenzione su qualche ente, scelto piú o meno arbitrariamente, in corrispondenza del quale si possa eseguire speditamente una verifica. Se si può fare vedere che questo caso specifico non soddisfa alla proposizione generale, l'enunciato di questa va respinto ed il nostro compito è terminato. Se invece la medesima proposizione è verificata per il particolare ente prescelto, si possono dedurre da tale esame alcuni suggerimenti. Si può riportarne l'impressione che, dopo tutto, quell'affermazione possa essere valida, nonché ricavarne qualche ispirazione circa la via da seguire per edificare una dimostrazione rigorosa. Oppure, come avviene in circostanze analoghe a quelle dell'esempio del punto 1, può scaturire qualche informazione circa la direzione in cui andare a cercare un *controesempio*, ossia relativa ad altri casi particolari su cui verificare. Si può modificare uno dei casi particolari presi in considerazione, variarlo, passare all'esame di casi particolari piú ampi, ricercare casi limite, proprio come è stato fatto nello stesso esempio citato poco fa.

I casi limite sono particolarmente istruttivi. Una proposizione di carattere generale che si suppone valida per tutti i mammiferi deve valere anche per un mammifero poco comune come la balena. Non dimentichiamo questo caso limite della balena: forse proprio da un esame di esso può dedursi la validità o la falsità dell'affermazione generale; ciò è molto probabile, perché simili casi limite sono spesso trascurati dagli inventori di generalizzazioni varie. Ma, quando si veda che la proposizione generale è verificata persino dai casi limite, da tale verifica scaturisce un'evidenza induttiva piuttosto forte, proprio perché era molto forte la probabilità che l'affermazione in istudio fosse invece da respingere. E cosí saremmo tentati di sostituire il proverbio con il quale iniziammo questo punto con il seguente motto: "Le eccezioni probabili confermano la regola."

3. *Esempio.* Sono note le velocità di due navi e le posizioni in cui queste si trovano ad un certo istante; ogni nave mantiene una

Fig. 19.

rotta rettilinea con velocità costante. Si calcoli la minima distanza alla quale possono trovarsi le due navi.

Qual è l'incognita? La minima distanza fra due corpi in movimento, che possiamo riguardare come punti materiali.

Quali sono i dati? La posizione iniziale e la velocità di ciascuno dei suddetti punti materiali. In particolare, è noto che le velocità si mantengono costanti in grandezza e direzione.

Qual è la condizione? La distanza deve essere valutata quando è minima, ossia nell'istante in cui i due punti materiali (le nostre navi) sono il piú possibile vicine l'una all'altra.

Si disegni una figura. Si introduca un conveniente sistema di notazioni. Con riferimento alla figura 19, i punti A e B indichino le posizioni iniziali note delle due navi ed i due segmenti orientati (vettori) AP e BQ le velocità assegnate, cosicché si possa affermare che la prima nave si muove lungo la retta congiungente A

e P e percorre la distanza AP nell'unità di tempo, mentre analogamente la seconda nave si muove lungo la retta BQ e percorre la distanza BQ nel medesimo intervallo di tempo.

Qual è l'incognita? La minima distanza delle due navi, una delle quali procede in direzione AP e l'altra in direzione BQ.

A questo punto è chiaro cosa si deve calcolare; ad ogni modo, volendo fare ricorso unicamente a concetti elementari, può apparire ancora oscuro il metodo con cui determinare l'incognita. Si tratta di un problema non troppo facile, la cui difficoltà presenta una caratteristica che potremmo cercare di definire dicendo che "c'è troppa varietà di scelta". Le posizioni iniziali, A e B, e le velocità costanti, AP e BQ, possono essere assegnate in diversi modi; infatti i quattro punti A, B, P e Q possono essere disposti sul piano arbitrariamente. Ma la soluzione deve valere qualunque siano i dati e non risulta affatto chiaro come possa un'unica soluzione contemplare tutte le possibili configurazioni. Questa vaga intuizione circa la "troppa varietà" può essere l'origine della seguente domanda (e della relativa risposta):

Si sa inventare un problema analogo piú semplice? Ed uno piú particolare? Naturalmente, c'è il caso limite particolare in cui una delle due velocità sia nulla. Sí, per esempio, la seconda nave sia ancorata in B; allora Q coincide con B. La minima distanza fra la nave in quiete e quella in moto è individuata dal segmento di perpendicolare abbassata dal punto B alla retta lungo la quale procede la seconda nave.

4. Se la considerazione di questo caso particolare scaturisce dal presentimento che c'è troppa generalizzazione e dalla sensazione che qualche caso particolare (che potrebbe persino sembrare troppo semplice per essere preso in esame) debba entrare in gioco, allora si tratta veramente di un'idea luminosa.

Ecco un problema connesso con quello proposto (quello particolare risolto proprio ora). *È possibile sfruttarlo? Si può fare uso del suo risultato? Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?* Esso dovrebbe poter essere sfruttato, ma come? In che modo il risultato ottenuto nel caso in cui B sia in quiete può essere usato per risolvere l'esercizio nell'ipotesi che B sia in moto? La quiete è un *caso particolare* di movimento. Il moto è relativo e quindi, qualunque sia la velocità data di B, questo punto può sempre essere pensato in quiete! Esponiamo il medesimo concetto in modo piú preciso e piú chiaro: Se imprimo all'intero sistema costituito dalle due navi un moto uniforme, la mutua distanza fra queste rimane inalterata e ciò si verifica, in particolare, per la minima distanza delle due navi richiesta dal problema. Ora, si può sempre imprimere un movimento che renda la velocità di una delle due navi eguale a zero; cosí il caso generale dell'enunciato si riduce a quello particolare già risolto. Basta imprimere al sistema una velocità opposta a *BQ*, ma della medesima grandezza di questa. Tale velocità è l'elemento ausiliario che consente il ricorso al risultato particolare.

La figura 20 mostra l'effettiva rappresentazione grafica della minima distanza *BS*.

5. Vale la pena di analizzare e tenere presente il modello della precedente risoluzione (v. i punti 3, 4).

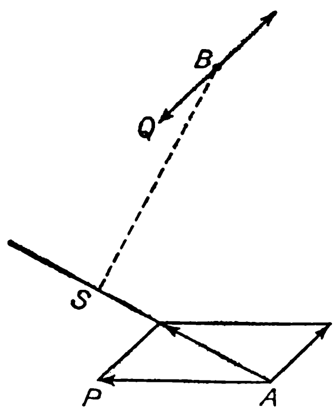


Fig. 20.

Per risolvere il problema iniziale (enunciato nelle prime righe del punto 3) abbiamo cominciato a determinare la soluzione di un altro problema che potremmo interpretare, in un certo senso, come problema ausiliario (contenuto nelle ultime righe del punto 3). Tale problema ausiliario risulta un caso particolare di quello proposto (il particolare caso limite in cui una delle due navi è in quiete). Il problema iniziale era stato assegnato, quello ausiliario è stato inventato nello sviluppo della risoluzione. Il problema iniziale si presentava molto arduo, mentre la risoluzione di quello ausiliario è stata immediata. Infatti il problema ausiliario era, come caso particolare, molto *meno ambizioso* di quello iniziale. Perché allora siamo stati capaci di risolvere il problema proposto in virtú di quello ausiliario? Ciò è stato una conseguenza del fatto che, nel ridurre il problema primitivo a quello particolare, si è compiuta un'ulteriore osservazione fondamentale (circa la relatività del moto).

La risoluzione del problema iniziale scaturí da due circostanze notevoli. In primo luogo, inventammo un conveniente problema ausiliario. Secondariamente, scoprimmo un'opportuna osservazione che permise di passare da quest'ultimo a quello di partenza. Risolvemmo in effetti il problema proposto con due passaggi; allo stesso modo potremmo attraversare un ruscello con due soli passi, purché fossimo abbastanza fortunati e scoprissimo un sasso sporgente in mezzo all'acqua cosí disposto da potere provvisoriamente funzionare come punto d'appoggio.

Riassumendo, possiamo ora dire di avere scelto il problema ausiliario meno difficile, meno ambizioso, particolare, come *trampolino* per risolvere il problema iniziale piú difficile, piú ambizioso, generale.

6. La particolarizzazione ha molte altre applicazioni sulle quali non ci soffermeremo in questa sede. Accenniamo solo al fatto che essa è di notevole efficacia nella verifica della soluzione (v. *Si può verificare il risultato?*, 2).

Un certo qual genere primitivo di particolarizzazione spesso si rivela utile per l'insegnante. Esso consiste nel fornire qualche *interpretazione concreta* degli elementi astratti che intervengono in un problema. Cosí, se questo tratta di un parallelepipedo rettangolo, l'insegnante può prendere come esempio l'aula (v. paragrafo 8). Nella geometria analitica dello spazio, un vertice dell'aula può visualizzare l'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, il pavimento e due pareti possono essere assunti come piani coordinati, due spigoli orizzontali ed uno verticale come assi coordinati. Introducendo il concetto di superficie di rotazione, l'insegnante può tracciare con il gesso una curva sulla porta e poi aprire questa lentamente. Sono artifici invero molto semplici, ma non si dovrebbe trascurare alcun accorgimento che abbia qualche probabilità di rendere piú accessibile e familiare la matematica ai ragazzi: essendo una scienza molto astratta, la matematica dovrebbe essere presentata in modo quanto piú possibile concreto.

Lavoro subcosciente. — Una sera volevo parlare con un amico di un certo autore, del quale non ricordavo in quel momento il nome. Ne fui irritato, perché, invece, rammentavo benissimo uno dei suoi racconti e persino degli aneddoti sulla vita di tale scrittore; insomma, di lui ricordavo tutto fuorché il nome. Cercai ripetutamente di rammentare quel nome, ma invano. Il mattino seguente, non appena pensai all'amnesia della sera prima, il nome di quell'autore mi venne alle labbra senza sforzo alcuno.

Molto probabilmente anche il lettore è passato attraverso una simile esperienza. E, se è un appassionato risolutore di problemi, forse anche in questo campo è stato protagonista di un episodio analogo. Infatti accade spesso di non ottenere alcun successo nella risoluzione di un problema; ci si accanisce senza tuttavia pervenire ad alcun risultato. Poi, quando si torna all'esercizio dopo il riposo notturno o dopo qualche giorno di intervallo, si ha un'idea luminosa e si porta rapidamente a compimento il problema. Poco conta la natura dell'esercizio: una parola dimenticata, un vocabolo difficile da inserire in un gioco di parole crociate, l'inizio di una lettera fastidiosa, oppure la risoluzione di un problema di matematica possono dare luogo a simili fenomeni.

Queste circostanze fanno pensare ad un *lavoro subcosciente.* Avviene spesso, infatti, che un problema lasciato per qualche tempo in disparte ritorni alla mente in forma estremamente chiara e suscettibile di una risoluzione immediata, come non risultava affatto quando era stato abbandonato. Chi lo ha chiarito, chi lo ha condotto cosí vicino alla soluzione? Ovviamente colui che lo aveva preso un tempo in considerazione, continuando ad occuparsene *subconsciamente.* Sarebbe difficile rispondere altrimenti, sebbene gli psicologi abbiano scoperto le origini di un'altra risposta che può richiedere qualche tempo per divenire piú soddisfacente.

Qualunque siano i meriti che si vogliano attribuire alla teoria del lavoro subcosciente, è certo che esiste un limite oltre il quale non si dovrebbe mai forzare la riflessione cosciente. Ci sono certi momenti in cui è meglio abbandonare per un istante il lavoro. "La notte porta consiglio", dice un antico proverbio. In verità, concedendo un periodo di riposo al problema ed a se stessi, si può all'indomani ottenere molto di piú con molto meno sforzo. "Quel che oggi non vuole, domani può", afferma un altro proverbio. Ma è preferibile sempre non mettere da parte alcun progetto o alcun problema che si voglia poi riprendere, se prima non si intuisce di avere compiuto qualche progresso; al momento di abbandonare il lavoro, dovrebbe essere stato messo in luce almeno qualche piccolo particolare, essere stato chiarito almeno qualche aspetto della questione.

Il riposo perfeziona solo quei problemi di cui desideriamo ardentemente pervenire alla soluzione, oppure a cui ci siamo applicati intensamente; uno sforzo consapevole ed un certo grado di tensione sembrano essere necessari a determinare il lavoro del subcosciente. Ad ogni modo, sarebbe troppo facile se non avvenisse cosí; potremmo risolvere problemi difficilissimi dormendo ed aspettando passivamente il presentarsi di un'idea luminosa.

Nell'antichità, un'idea felice che si manifestasse all'improvviso era considerata un'ispirazione, un dono degli dei. Un simile dono va meritato con la fatica od almeno con un ardente desiderio.[9]

Simmetria. — Questo termine ha due significati: un significato geometrico, il piú comune e particolare, ed un significato logico, meno noto e generale.

La geometria solida elementare contempla due tipi di simmetria: la simmetria rispetto ad un piano (detto piano di simmetria) e la simmetria rispetto ad un punto (detto centro di simmetria). Il corpo umano sembra perfettamente simmetrico, ma in effetti non lo è; molti organi interni sono disposti in modo completamente asimmetrico. Una statua può essere del tutto simmetrica rispetto ad un piano verticale cosicché due metà di essa appaiono "intercambiabili"

In senso lato, un certo insieme si dice simmetrico se presenta delle parti intercambiabili. Si hanno diversi tipi di simmetria, i quali differiscono gli uni dagli altri per il numero delle parti intercambiabili e per le operazioni che mutano tali parti le une nelle altre corrispondenti. Cosí il cubo ammette una spiccata simmetria; le sue sei facce sono intercambiabili fra loro ed altrettanto si verifica sia per gli otto vertici che per i dodici spigoli dello stesso solido. L'espressione

$$yz + zx + xy$$

pure è simmetrica: si possono scambiare fra loro due qualsiasi delle tre lettere x, y, z che vi figurano, senza che essa risulti alterata.

La simmetria, considerata da un punto di vista generale, è importante nell'ambito dello studio che stiamo svolgendo. Quando si abbia da considerare un problema sotto qualche aspetto simmetrico, può essere vantaggioso prendere in considerazione gli elementi intercambiabili di esso ed in particolare quelli che giocano un medesimo ruolo od un ruolo analogo (v. *Elementi ausiliari* 3).

[9] Per un'esauriente discussione sul "pensiero inconscio" v. JACQUES HADAMARD, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.*

Si cerchi sempre di operare con simmetria su tutto ciò che è simmetrico e non si disperdano senza scopo le eventuali simmetrie naturali. Ma qualche volta si è costretti a procedere in modo asimmetrico sopra elementi simmetrici per natura. I due guanti di uno stesso paio sono indubbiamente simmetrici; tuttavia nessuno li usa in modo perfettamente simmetrico, nessuno calza entrambi i guanti simultaneamente, ma se ne infila uno dopo l'altro.

Come abbiamo osservato nel paragrafo 14, la simmetria può rivelarsi utile anche per la verifica dei risultati.

Vocaboli, vecchi e nuovi. — La nomenclatura alla quale si ricorre per descrivere i processi di risoluzione dei problemi è spesso ambigua. Risolvere problemi è un'attività ben nota per se stessa e oggetto di frequenti discussioni, ma, come ogni altra attività intellettuale, difficilmente descrivibile. In mancanza di uno studio sistematico non esistono vocaboli tecnici efficaci per una descrizione siffatta e certi vocaboli pseudo-tecnici usati comunemente servono solo a creare della confusione, perché essi sono adoperati con significati differenti da autori diversi.

Il breve elenco che segue contiene alcuni nuovi vocaboli usati in questo volume ed alcuni vocaboli vecchi che, invece, abbiamo preferito trascurare; in esso sono riportati anche vecchi vocaboli che, malgrado il loro incerto significato, abbiamo conservato.

Il lettore che abbia idee bene ancorate ad esempi concreti non si sentirà affatto disorientato dalla discussione che apriremo.

1. *Analisi* è un vocabolo definito in modo preciso da *Pappo,* è un termine utile, efficace per descrivere un caratteristico procedimento per concepire un piano di risoluzione partendo dall'incognita (o dalla tesi) e risalendo ai dati (o all'ipotesi). Disgraziatamente il vocabolo ha acquistato altri significati molto diversi da questo (per esempio: analisi matematica, analisi chimica, analisi logica) e quindi l'autore, pur con notevole rincrescimento, non ne ha fatto molto uso in questa sua esposizione.

2. *Condizion*e è la relazione che intercede fra l'incognita di un "problema di determinazione" ed i dati (v. *Problemi di determinazione, problemi di dimostrazione,* 3). In questo significato, è un vocabolo chiaro, utile ed insostituibile. Spesso è necessario scomporre la condizione in piú parti [nelle parti, precisamente I) e II) degli esempi riferiti in *Scomporre e ricomporre,* 7, 8]. Ora, ciascuna parte della condizione è detta comunemente *una* condizione. Si può facilmente ovviare a questa ambiguità spesso imbarazzante, introducendo qualche vocabolo tecnico per indicare le

parti dell'intera condizione; per esempio, una qualsiasi di tali denominazioni potrebbe essere quella da noi adottata, *clausola.*

3. *Ipotesi* denota una parte essenziale di un teorema di matematica del tipo piú comune (v. *Problemi di determinazione, problemi di dimostrazione*, 4). In questo significato, il vocabolo è del tutto chiaro e soddisfacente. Una complicazione, però, nasce dal fatto che ogni parte in cui *la* ipotesi complessiva può pensarsi scomposta è detta comunemente *una* ipotesi, come se l'intera ipotesi fosse costituita da tante ipotesi parziali. Si potrebbe anche in questo caso ovviare all'inconveniente denotando ciascuna delle suddette parti con il termine *clausola*, o con qualche altro vocabolo analogo (v. *Condizione*).

4. *Parti principali* di un problema è una locuzione che abbiamo definita in *Problemi di determinazione, problemi di dimostrazione*, 3, 4.

5. *Problemi di determinazione*, *problemi di dimostrazione* sono denominazioni introdotte a malincuore per sostituire vocaboli classici il cui significato, tuttavia, è stato corrotto senza possibilità di redenzione dall'uso comune. Nella traduzione latina degli antichi testi greci di matematica, i problemi dell'uno e dell'altro tipo vennero detti tutti "proposizione"; ogni "problema di determinazione" fu chiamato semplicemente "problema" ed ogni "problema di dimostrazione" fu detto "teorema". Nel linguaggio matematico classico, le parole proposizione, problema, teorema conservano tuttora questo loro significato "euclideo", ma questa precisione scompare quasi completamente nel linguaggio matematico moderno; ciò giustifica, in un certo senso, l'introduzione di nuovi vocaboli.

6. *Ragionamento progressivo* si trova in vari autori con diversi significati, fra cui quello classico di "sintesi" (v. *Sintesi*). In quest'ultimo senso, il suo impiego è giustificato, ma qui abbiamo preferito evitarlo.

7. *Ragionamento regressivo* venne usato da alcuni autori nel significato classico di "analisi" (v. *Analisi*, *Ragionamento progressivo*). Anche l'impiego di tale denominazione è giustificabile, ma qui abbiamo preferito evitarlo.

8. *Soluzione* è un vocabolo molto chiaro, se preso nel suo significato di natura essenzialmente matematica; esso denota qualunque ente che soddisfi alla condizione di un "problema di determinazione". Per esempio, le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

sono le radici della medesima, ossia i numeri 1 e 2. Purtroppo questo termine si trova usato anche con altri significati che non sono essenzialmente matematici e che sono usati dai cultori di tale disciplina insieme e contemporaneamente a quello matematico. Soluzione è cosiddetto, impropriamente, anche il "processo di risoluzione di un problema", oppure il "risultato dell'attività svolta per trovare una risoluzione"; si parla allora, nei due casi rispettivamente, di "soluzione difficile", oppure di "soddisfacente soluzione". Ora, accade spesso che, nell'esposizione di un ragionamento matematico, si debba parlare e dell'ente che soddisfa alla condizione di un problema e del processo di risoluzione e del risultato dell'attività svolta per trovare una risoluzione; è assurdo pretendere di essere precisi e di risultare chiari, quando si indicano tutte e tre queste cose con il medesimo vocabolo "soluzione"!

9. *Sintesi* fu introdotto da *Pappo* in un senso ben preciso, che dovrebbe essere conservato. Purtroppo siamo stati costretti a fare parco uso di questo vocabolo nel presente volumetto a causa degli stessi motivi che ci hanno indotto a trascurare il termine complementare "analisi" (v. *Analisi*).

Verifica dimensionale. — Si tratta di un notissimo, rapido ed efficace metodo per verificare le formule geometriche o fisiche.

1. Per elencare brevemente le operazioni richieste da tale verifica, riprendiamo l'esempio di un tronco di cono circolare retto. Siano ora:

R il raggio della base maggiore,
r il raggio della base minore,
h l'altezza del tronco,
S l'area della superficie laterale del tronco.

Noti R, r, h, è evidente che S risulta determinata e suscettibile dell'espressione

$$S = \pi \ (R + r) \sqrt{(R-r)^2 + h^2};$$

ci proponiamo di eseguire la verifica dimensionale di tale formula.

La dimensione di una grandezza geometrica si determina facilmente. Cosí R, r e h sono lunghezze; supposto di adottare il centimetro come unità di misura di lunghezza, le suddette quantità hanno tutte la dimensione cm. L'area S risulterà misurata, di conseguenza, in cm^2. Invece $\pi = 3{,}14159...$ è un numero puro; volendo allora attribuire una dimensione ad una quantità puramente numerica, si trova che tale dimensione è 1.

Tutti gli addendi di una somma devono avere una medesima dimensione, che è anche quella del totale. Ora R, r e $R + r$ hanno tutti dimensione cm; i due addendi $(R-r)^2$ ed h^2 hanno pure, come devono, una stessa dimensione che è cm^2.

La dimensione di un prodotto è uguale al prodotto delle dimensioni dei singoli fattori ed una regola analoga vale per l'operazione di elevamento a potenza. Pertanto, sostituendo nella formula che ci siamo proposti di verificare ciascuna delle quantità che in essa figura con la corrispondente dimensione, si ottiene:

$$\text{cm}^2 = 1 \cdot \text{cm} \cdot \sqrt{\text{cm}^2}.$$

Questa identità è manifestamente vera, quindi la verifica non ha rivelato alcun errore nella nostra espressione che in tale modo è stata verificata dimensionalmente.

Per altri esempi, il lettore rilegga il paragrafo 14 e *Si può verificare il risultato?*, 2.

2. La verifica dimensionale può essere eseguita sul risultato finale di un problema, oppure sui risultati che via via si ottengono, in esercizi eseguiti da noi oppure da altri (fra l'altro, è un metodo molto conveniente per correggere rapidamente i compiti in classe dei propri allievi), e persino su formule che ricordiamo a memoria o che riteniamo plausibili.

Se, per esempio, ricordiamo le espressioni $4\pi r^2$ e $4\pi r^3/3$ per l'area della superficie ed il volume della sfera, ma non siamo completamente sicuri quale sia l'una e quale l'altra, la verifica dimensionale può dissipare ogni nostra incertezza in proposito.

3. La verifica dimensionale è efficacissima anche in fisica, forse piú che in geometria.

Consideriamo un pendolo "semplice", ossia un minuscolo corpo pesante sospeso ad un filo che si possa pensare praticamente inestensibile ed il cui peso sia trascurabile. Diciamo l la lunghezza del filo, g l'accelerazione di gravità e T il periodo del pendolo.

L'esperienza mostra che T dipende unicamente da l e da g. Ma qual è il tipo di tale dipendenza? Si può ricordare, oppure arguire che

$$T = cl^m g^n,$$

dove c, m ed n sono delle costanti numeriche. Ossia si suppone che T risulti proporzionale a certe potenze, l^m e g^n, di basi ordinatamente eguali ad l e a g.

Fissiamo l'attenzione sulle dimensioni delle grandezze che figurano nei due membri dell'eguaglianza ora scritta. Poiché T è un periodo, se si adotta come unità di misura degli intervalli di tempo il secondo, si avrà che la dimensione di T è s. La dimensione di l è cm; quella dell'accelerazione di gravità g è cm/s²; infine la costante numerica c ha dimensione 1. La verifica dimensionale conduce pertanto all'equazione:

$$\sec = 1 \cdot (\mathrm{cm})^m \, (\mathrm{cm/s}^2)^n;$$

ossia alla:

$$\sec = (\mathrm{cm})^{m+n} \, \mathrm{s}^{-2n}.$$

Eguagliando ora gli esponenti delle potenze di egual base che figurano nei due membri di quest'ultima equazione, si ottiene:

$$0 = m + n, \qquad 1 = -2n;$$

segue:

$$n = -\frac{1}{2},$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Quindi la formula relativa al periodo T del pendolo semplice deve essere del tipo:

$$T = c l^{1/2} g^{-1/2} = c \sqrt{\frac{l}{g}} \,.$$

In questo caso, la verifica dimensionale permette di conoscere molte cose, ma non tutto. In primo luogo, essa non fornisce alcuna informazione circa il valore numerico della costante c (che, in effetti, vale 2π). Secondariamente, essa non dice nulla intorno ai limiti di validità della nostra formula, che, in realtà, è valida solo per piccole oscillazioni del pendolo e solo in prima approssimazione (è rigorosa unicamente per oscillazioni "infinitamente piccole"). A parte ciò, tuttavia, è fuori dubbio che la considerazione delle dimensioni ci ha permesso di prevedere immediatamente, e nel modo piú semplice, una parte essenziale di un risultato la cui determinazione completa richiede metodi e considerazioni di gran lunga piú complessi e rigorosi. Analoghe circostanze si presentano in molti altri casi simili a questo.

Il futuro matematico. — Un abile risolutore di problemi potrebbe essere un futuro matematico; ma, per divenire un matematico, non basta essere un abile risolutore di problemi. A tempo debito, un futuro matematico dovrebbe riuscire a risolvere problemi matematici notevoli; ma, per prima cosa, egli dovrebbe scoprire verso quale tipo di ricerche ha una spiccata inclinazione naturale.

Per un futuro matematico, la parte piú importante del suo compito è meditare sulla risoluzione, una volta che questa sia stata messa nella forma definitiva. Esaminando lo sviluppo del suo lavoro e la stesura completa della risoluzione, egli può scoprire un'inesauribile varietà di circostanze degne di nota. Può riflettere sulle difficoltà del problema e sui concetti fondamentali cui ha dovuto ricorrere; può cercare di rendersi conto di cosa gli sia stato di ostacolo, oppure di aiuto. Può cercare di trarne qualche semplice intuizione: *Si può vedere il risultato a colpo d'occhio?* Egli può anche confrontare e sviluppare altri procedimenti: *Si può ottenere il risultato in altro modo?* E può inoltre tentare di rendere piú chiaro il problema che ha risolto stabilendo un parallelo fra questo ed un altro considerato precedentemente; può sforzarsi di inventare nuovi problemi risolvibili in virtú del lavoro appena compiuto: *Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema?* Assimilando il problema che ha condotto a termine, il futuro matematico si procura nuove cognizioni bene ordinate e pronte per essere utilizzate in seguito.

Come avviene a ciascun altro mortale, il futuro matematico impara per imitazione ed esercizio. Naturalmente dovrebbe cercare di imitare un modello esatto. Potrebbe osservare un insegnante il cui metodo sia una guida ed uno sprone. Potrebbe gareggiare con un compagno altrettanto brillante. Inoltre, il che è forse il fattore piú importante, dovrebbe leggere non i soliti libri di testo, ma le opere di autori autorevoli, finché ne trovi uno i cui metodi egli si senta spontaneamente portato a seguire od imitare. Dovrebbe godere ad investigare su questioni che gli sembrino facili, oppure istruttive, oppure significative. Dovrebbe risolvere problemi, scegliere quelli che sono alla sua portata, meditare sulla loro risoluzione ed inventarne dei nuovi. Con questi mezzi ed altri ancora, il futuro matematico dovrebbe procurare di fare la sua prima scoperta: dovrebbe scoprire le sue preferenze e le sue antipatie, i suoi gusti, il suo stile.

Il risolutore intelligente. — Il risolutore intelligente si pone spesso domande simili a quelle riferite nel nostro schema. Può essere che egli scopra da solo domande di questo tipo, o che, avendo udito tali domande sulle labbra di qualcun altro, ne abbia comunque scoperto da solo l'impiego specifico. È probabile, tuttavia, che egli non si renda conto di ripetere tante volte lo stesso stereotipato quesito. Oppure egli preferisce, fra tutte, una particolare domanda; in questo caso, sa che essa costituisce una parte essenziale della sua attività mentale e che si rivela efficace in questa o quella fase di studio: cosí egli afferra un concetto esatto, ponendosi l'esatto quesito.

Il risolutore intelligente può apprezzare l'utilità delle domande e dei suggerimenti del nostro schema. Egli può comprendere benissimo le spiegazioni e gli esempi che illustrano un certo problema, può riconoscere l'uso specifico di una particolare domanda; ma non è veramente in grado di pervenire ad una comprensione effettiva, se non penetra a fondo il procedimento determinato, in qualche modo, da quella stessa domanda: solo sperimentandone l'efficacia attraverso effettive esperienze personali, egli può scoprire l'uso piú conveniente di quel quesito.

Il risolutore intelligente dovrebbe essere pronto ad avanzare tutte le domande del nostro schema, ma non dovrebbe rivolgersene alcuna senza essere indotto ad agire cosí da un'accurata considerazione del problema in esame e da una spassionata convinzione di procedere in modo utile. Infatti egli dovrebbe sapere riconoscere da solo se la situazione in cui si trova ad un certo momento è abbastanza simile, oppure del tutto diversa, a qualche altra circostanza nella quale ha sperimentato con successo l'applicazione del medesimo quesito.

Il risolutore intelligente, per prima cosa, si sforza di comprendere il problema a fondo e senza incertezze: infatti egli deve concentrarsi sull'esercizio, desiderare ardentemente di determinarne la soluzione. Se non si prova almeno un vero desiderio di risolvere un problema, è meglio lasciarlo da parte. Il segreto per riuscire è donarsi completamente al proprio problema.

Il lettore intelligente. — Il lettore intelligente di un libro di matematica dovrebbe desiderare due cose:

1) riconoscere l'esattezza di ogni passaggio dei ragionamenti;

2) comprendere lo scopo di ciascuno dei suddetti passaggi.

L'auditore intelligente che assiste ad una conferenza di matematica è animato dagli stessi desideri. Se egli non riconosce l'esattezza di un passaggio e dubita che esso sia corretto, può protestare e fare delle obiezioni. Se non comprende lo scopo di un passaggio e dubita che esso sia giustificato, di solito non riesce neppure a sollevare un'aperta e precisa obiezione; cosí non protesta affatto, ma, riportandone una vera e propria sensazione di sgomento e di noia, perde completamente il filo del ragionamento.

L'insegnante e l'autore coscienziosi dovrebbero tenere presenti queste considerazioni. Senza dubbio è necessario parlare e scrivere in modo corretto; ma ciò non è sufficiente. Una deduzione presentata con tutto il rigore sulla lavagna o sulle pagine di un libro può risultare difficilissima e poco istruttiva, se resta oscuro lo scopo dei passaggi su cui essa è fondata, se l'auditore o il lettore non può comprendere come sia umanamente possibile inventare un simile ragionamento, se egli non riesce a ricavare da tale esposizione alcun suggerimento circa il modo in cui dovrebbe comportarsi se volesse eseguire da solo una dimostrazione analoga.

Le domande ed i suggerimenti del nostro schema possono essere sfruttati dagli autori e dagli insegnanti al fine di mettere in risalto lo scopo e le ragioni dei loro ragionamenti. Da questo punto di vista, è particolarmente efficace la domanda: *Si è fatto uso di tutti i dati?* Autori ed insegnanti possono ricorrere ad essa per giustificare esaurientemente la considerazione di un dato per qualche tempo trascurato. Lettori ed auditori possono ricorrere ancora ad essa per comprendere il motivo per cui l'autore o l'insegnante fissa l'attenzione su questo o su quell'elemento, per riconoscere che, ponendosi la medesima domanda, avrebbero potuto scoprire da soli la necessità di un determinato passaggio del ragionamento.

Il professore di matematica tradizionale. — Le leggende popolari presentano il professore di matematica come una creatura estremamente distratta e costantemente assorta. Di solito, egli si presenta in pubblico con un ombrello stinto in ciascuna mano. Preferisce guardare la lavagna e volgere le spalle alla scolaresca. Scrive *a*, legge *b* e vuole significare *c*; ma dovrebbe essere *d*. Alcuni di questi detti si tramandano di generazione in generazione.

"Per risolvere questa equazione differenziale, guardatela finché vi verrà in mente una soluzione."

"Questo principio è di una generalità cosí assoluta che non è possibile farne alcuna applicazione particolare."

"La geometria è l'arte di ragionare in modo esatto su figure errate."

"Il mio metodo di superare le difficoltà consiste nel raggirarle."

"Qual è la differenza fra metodo e artificio? Un metodo è un artificio che può essere usato piú volte."

Malgrado tutto ciò, si può imparare qualcosa da un simile professore di matematica. Speriamo quindi che non divenga tradizionale, invece, quel professore di matematica dal quale non si può imparare proprio nulla!

Variazione del problema. — Un insetto (come abbiamo già descritto altrove) tenta di evadere da un certo ambiente attraverso il cristallo di una finestra, tenta ripetutamente la disperata imprésa, senza rendersi conto che la finestra accanto a quella chiusa, che rende vani tutti i suoi sforzi, è invece aperta; di qui, anzi, esso è penetrato in quella stanza. Un topo può agire con maggiore astuzia: caduto in una trappola, tenta di sgattaiolarne fuori attraverso due sbarrette, poi attraverso le due piú vicine alle precedenti, poi attraverso altre due; varia i suoi tentativi, vaglia diverse possibilità. Un uomo è capace, o almeno dovrebbe essere capace, di variare i tentativi in modo piú intelligente, di tentare varie possibilità con maggiore discernimento, di trarre insegnamento dai suoi errori e dalle conseguenze dei suoi difetti. "Si tenti sempre, si tenti di nuovo." È un antico proverbio; è un ottimo consiglio. L'insetto, il topo e l'uomo seguono tale ammonimento; ma se l'uno ne ricava piú profitto degli altri è solo perché egli *varia il problema* con maggiore discernimento.

1. Al termine di un esercizio, quando abbiamo conseguito la soluzione, la nostra comprensione relativa a quel problema sarà piú vasta e piú specifica che all'istante iniziale. Volendo passare dalla visione iniziale di una questione ad una valutazione piú profonda e particolare, è opportuno osservare quel problema da diversi punti di vista e sotto aspetti distinti.

Nella risoluzione dei problemi, il successo dipende spesso dalla scelta dell'aspetto esatto, dal riconoscimento del lato piú accessibile dell'ostacolo da superare. Per individuare l'aspetto esatto, il lato piú accessibile, si esaminano aspetti e lati differenti, *si varia il problema.*

2. La variazione del problema è un importante metodo; ci si può convincere della verità contenuta in questa affermazione in molti modi. Cosí, in un certo senso, il progresso che si compie nella risoluzione di un problema appare come il risultato dei processi di mobilitazione ed organizzazione di cognizioni e concetti precedentemente acquisiti. Si tratta di ricavare dalla memo-

ria e di far giocare determinate nozioni. Ora, la variazione del problema aiuta a risvegliare questi concetti. In che modo?

Noi ricordiamo in virtú di una specie di "azione di contatto", detta "associazione di idee"; ciò che abbiamo in mente in un determinato istante tende a richiamarci idee con cui siamo già venuti a contatto in epoca anteriore. (In questa sede, non è il caso di esporre con maggiore ampiezza e precisione la teoria dell'associazione delle idee, o di discutere intorno ai limiti della sua applicazione e della sua validità.) *Variando il problema,* si introducono nuove idee e quindi si stabiliscono ulteriori contatti, si determinano altre possibilità di mettere in relazione elementi importanti per il problema in istudio.

3. Non si può sperare di risolvere un qualsiasi problema significativo senza intensa applicazione. Ma ci si stanca facilmente di tenere la propria attenzione concentrata sopra uno stesso argomento. Solo variando continuamente il problema, l'oggetto cui deve essere rivolta la nostra attenzione, essa può essere mantenuta sempre ben desta.

Se il nostro lavoro avanza con successo, c'è qualcosa da fare, ci sono nuovi casi da esaminare e la nostra attenzione rimane attiva; allora il nostro interesse si ravviva. Ma, quando invece stentiamo a compiere dei progressi, la nostra attenzione si assopisce, il nostro interesse cade; ci stanchiamo del problema, i nostri pensieri cominciano a vagare e in tale caso c'è un pericolo di perdere completamente di vista l'esercizio. Si può evitare questo inconveniente *procacciandosi un quesito nuovo* relativo allo stesso problema.

Il nuovo quesito stabilisce immediatamente possibili contatti non ancora provati con le cognizioni già acquisite, ridona la speranza di potere eseguire utili associazioni. Esso inoltre *riconquista il nostro interesse con una variazione del problema* di cui rivela qualche aspetto diverso.

4. *Esempio.* Si calcoli la misura del volume di un tronco di piramide a base quadrata, note le misure del lato della base maggiore, di quello della base minore e dell'altezza del tronco, che indichiamo rispettivamente con le lettere a, b e h.

Si tratta di un problema che può essere assegnato ad una scolaresca alla quale sia nota la formula per il calcolo della misura del volume del prisma e della piramide. Se gli alunni non avanzano spontaneamente alcuna idea, l'insegnante può iniziare *variando i dati* dell'esercizio proposto. Si sa che deve essere $a > b$. Cosa avviene quando b aumenta fino a divenire eguale ad a? Il tronco considerato si trasforma in un prisma e, in questo caso, la soluzione richiesta è a^2h. Cosa avviene quando b diminuisce fino a divenire eguale a zero? Il tronco si trasforma in una piramide ed allora la soluzione cercata è $a^2h/3$.

La variazione dei dati è, prima di tutto, efficace per accrescere l'interesse verso un problema. Secondariamente, essa può suggerire di utilizzare, in qualche modo, i risultati noti relativi al prisma ed alla piramide. Comunque si trova cosí una caratteristica ben precisa del risultato che si cerca; l'espressione finale della soluzione deve essere tale che, per $b = a$, si riduca a a^2h e, per $b = 0$, ad $a^2h/3$. Riuscire a prevedere alcuni aspetti particolari di un risultato è molto vantaggioso. Infatti si possono ricavare da essi convenienti suggerimenti e, in ogni caso, alla fine della risoluzione si ha già una base su cui erigere una verifica del risultato. Quindi si è cosí trovata anche una risposta alla domanda: *Si può verificare il risultato?* (v. il punto 2).

5. *Esempio.* Si costruisca un trapezio di cui siano note le misure dei quattro lati a, b, c e d.

Supponiamo che a sia la misura della base maggiore, c quella della base minore; segue che i segmenti che misurano rispettivamente a e c sono paralleli, ma non eguali fra loro, mentre quelli che misurano b e d non sono neppure paralleli. In mancanza di altre idee, si può cominciare a variare i dati.

Si tratta di un trapezio per cui deve essere $a > c$. Cosa accade quando c diminuisce fino a divenire eguale a zero? Il trapezio degenera in un triangolo, ossia in un ente ben noto che può essere costruito partendo da vari punti; potrebbe essere conveniente introdurre tale triangolo nella figura. Ciò si ottiene tracciando un segmento ausiliario, che è precisamente una diagonale del tra-

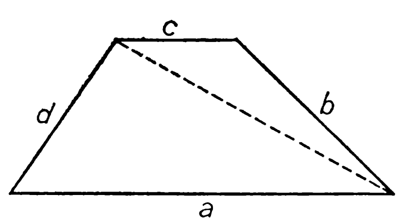


Fig. 21.

pezio (v. fig. 21). Purtroppo, considerando questo triangolo, si nota che esso non è molto utile; ne conosciamo due lati, le cui misure sono a e d, ma in effetti ci servirebbero tre dati.

Tentiamo qualche altra via. Cosa accade quando c aumenta fino a divenire eguale ad a? Il trapezio degenera in un parallelogrammo. È possibile sfruttare tale parallelogrammo? Un breve esame ci fa considerare il triangolo che è stato aggiunto al trapezio per dare luogo al parallelogrammo (v. fig. 22). Di questo triangolo sono note le misure dei tre lati, b, d e $a-c$; quindi esso può essere costruito facilmente.

Variando il problema iniziale (costruzione del trapezio), siamo pervenuti ad un problema ausiliario piú semplice (costruzione del triangolo). Usando la soluzione di quello ausiliario, è

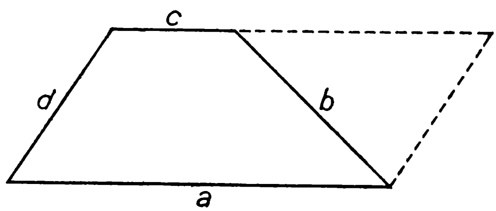


Fig. 22.

immediato risolvere l'esercizio proposto (basta completare il parallelogrammo).

L'esempio ora riferito è caratteristico e tipica è pure la circostanza che il primo tentativo si sia risolto in un fallimento. Esaminando di nuovo questo caso alla luce delle ultime considerazioni, si può comprendere come mai esso si sia rivelato inutile. Eppure era fondato su una buona idea: in particolare, ci aveva suggerito la costruzione di un triangolo come mezzo per conseguire il nostro fine. Infatti siamo pervenuti al secondo tentativo, questa volta felice, modificando quello precedente che non aveva condotto ad alcun risultato. In entrambi i casi è stata variata c, prima diminuendola e poi aumentandola.

6. Come è illustrato dall'esempio precedente, si devono cercare spesso variazioni distinte del problema assegnato. È necessario variare, enunciare in forma diversa, trasformare piú volte il problema fin tanto che si trovi finalmente una via opportuna. Un tentativo infruttuoso può essere istruttivo; in un tentativo siffatto può essere racchiusa qualche ottima idea e, *modificandone* uno vano, si può pervenire ad un artificio piú conveniente. Ciò che si raggiunge dopo vari tentativi è molto spesso, come nell'ultimo esempio, un problema ausiliario risolubile piú facilmente di quello assegnato.

7. Ci sono alcuni metodi per variare i problemi che sono particolarmente efficaci, come il ricorso alla *Definizione* di qualche ente, il processo di *Scomporre e ricomporre*, l'introduzione di *Elementi ausiliari*, la *Generalizzazione*, la *Particolarizzazione* e l'impiego dell'*Analogia*.

8. Quanto abbiamo affermato poco fa (v. il punto 3) circa i nuovi aspetti atti a riconquistare il nostro interesse è importante per l'impiego specifico del nostro schema.

Un insegnante può appunto ricorrere a tale schema per aiutare gli alunni. Un allievo che compia progressi da solo non ha bisogno di alcun suggerimento del professore e questi dovrebbe lasciarlo proseguire senza interromperlo con alcuna domanda, consentendogli cosí di lavorare tranquillo con grande vantaggio per la sua personalità. Invece l'insegnante dovrebbe naturalmente cercare, e trovare, una domanda, oppure un suggerimento efficace quando comprende che lo studente si trova in cattive acque. Infatti, in quest'ultima situazione, sussiste il pericolo che l'alunno si stanchi del problema e lo abbandoni, oppure se ne disinteressi e commetta qualche sciocca svista proprio a causa della sua indifferenza nei riguardi dell'esercizio.

Ciascuno, infine, può usare il nostro schema per risolvere i suoi problemi. Per farne un uso appropriato, si procede come nel primo caso. Quando stiamo per compiere progressi soddisfacenti, quando le nuove osservazioni si affaccino spontaneamente alle labbra, sarebbe davvero una sciocchezza frenare con domande generali un avanzamento cosí originale. Quando invece si sia bloccati da qualche ostacolo e nessuna idea geniale attraversi la nostra mente, c'è il pericolo di stancarci del problema. Allora è il momento di riflettere sopra qualche concetto generale che potrebbe essere di inestimabile utilità, sopra qualche domanda o suggerimento del nostro schema che potrebbe rivelarsi efficace. Ed è bene accetta ogni domanda atta a mostrare il problema sotto un aspetto diverso; essa può riconquistare il nostro interesse, può indurci a riprendere il lavoro ed a riflettere.

Qual è l'incognita? — Cosa si chiede? Cosa si vuole? Cosa si suppone di cercare?

Quali sono i dati? Cosa è dato? Cosa si conosce?

Qual è la condizione? Da quale relazione l'incognita risulta legata ai dati?

Ecco le domande alle quali l'insegnante può ricorrere per accertarsi che un problema assegnato sia stato ben compreso dai suoi alunni; infatti questi dovrebbero sapere rispondere prontamente. Inoltre, esse richiamano l'attenzione degli studenti sopra le parti principali di un "problema di determinazione", ossia sopra l'incognita, i dati e la condizione. Può essere necessario considerare piú volte queste parti, quindi spesso le domande in questione vengono ripetute nelle diverse fasi della risoluzione. (Per esempio, v. i paragrafi 8, 10, 18, 20; *Stabilire un'equazione,* 3, 4; *Problemi pratici*, 1; *Giochi d'enigmistica*; ecc.)

Queste domande sono proprio molto importanti per chi risolve problemi. Egli in tale modo controlla l'esattezza della visione che si è fatta del problema, fissa l'attenzione sulle parti principali del suo esercizio. La risoluzione consiste essenzialmente in un collegamento fra l'incognita ed i dati; quindi, per chi deve risolvere un problema, è importantissimo mettere in risalto tali elementi chiedendosi: *Qual è l'incognita? Quali sono i dati?*

Il problema da risolvere può ammettere varie incognite, oppure una condizione le cui parti distinte devono essere prese in considerazione una alla volta; può avvenire anche che appaia conveniente considerare qualche dato separatamente dagli altri. Pertanto le precedenti domande possono venire opportunamente modificate in diversi modi: Quali sono le incognite? Qual è il primo dato? Qual è il secondo dato? Quali sono le varie parti della condizione? Qual è la prima clausola della condizione?

Le parti principali di un "problema di dimostrazione" sono l'ipotesi e la tesi; le domande corrispondenti sono: *Qual è l'ipotesi? Qual è la tesi?* Può essere necessario ricorrere a qualche variazione nell'espressione verbale, oppure a modifiche formali nell'espressione verbale di queste domande usate cosí frequentemente: *Che cosa si suppone? Quali sono le varie parti dell'assunto?* (Per esempio, v. il paragrafo 19.)

Necessità delle dimostrazioni. — Si narra che Newton, quando era un ragazzetto, iniziò lo studio della geometria leggendo, come era consuetudine a quell'epoca, gli *Elementi* di Euclide. Lesse gli enunciati dei teoremi, riconobbe subito la loro validità e trascurò la lettura delle dimostrazioni meravigliandosi che ci fosse qualcuno che si facesse scrupolo di dimostrare proposizioni cosí evidenti. Tuttavia, qualche anno dopo, egli cambiò opinione ed ammirò Euclide.

Che l'aneddoto sia vero oppure no, resta sempre la domanda: Per quale motivo si imparano e si insegnano le dimostrazioni? È preferibile abolire le dimostrazioni oppure dimostrare tutte le proposizioni o solo qualcuna di esse? In quest'ultima eventualità, quali proposizioni dimostrare?

1. *Dimostrazioni rigorose.* Per i cultori di logica di una certa scuola, esistono soltanto le dimostrazioni rigorose. Tutto ciò che pretende di essere una dimostrazione non deve presentare alcuna lacuna, alcuna falla, alcuna incertezza; altrimenti non è una dimostrazione. Si possono trovare dimostrazioni rigorose di questo tipo cosí superiore nella vita di ogni giorno, oppure nei processi legali, oppure nelle scienze fisiche? Difficilmente. Quindi non è facile comprendere come si possa ricavare il concetto e penetrare l'essenza di dimostrazione rigorosa, in senso cosí stretto.

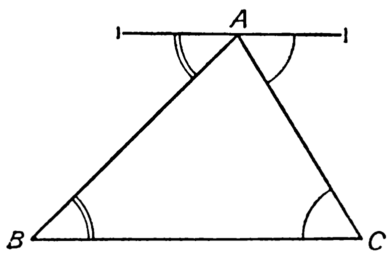


Fig. 23.

Forzando un poco la realtà, si potrebbe affermare che gli uomini appresero questo concetto da un solo matematico e da un solo libro: Euclide ed i suoi *Elementi.* Comunque, lo studio degli elementi di geometria piana fornisce anche oggi l'occasione piú propizia per afferrare il concetto di dimostrazione rigorosa.

Come esempio, consideriamo la dimostrazione del teorema: *La somma degli angoli interni di ciascun triangolo è eguale a due angoli retti.*[10] La figura 23, che la maggior parte dei lettori certamente ricorda a memoria, necessita di una breve spiegazione. In essa notiamo una retta passante per il vertice *A* e parallela alla base *BC* del triangolo *ABC.* Gli angoli interni aventi vertici *B* e *C* risultano ordinatamente eguali ad angoli determinati di vertice *A*; ciò si vede molto chiaramente dalla figura, in quanto angoli, a due a due alterni interni di rette, parallele tagliate da una trasversale sono uguali. Quindi i tre angoli interni

[10] Si tratta di una parte della Proposizione 32 del Libro I degli *Elementi* di Euclide. La dimostrazione che esporremo non è precisamente di Euclide, ma era comunque nota ai greci.

del triangolo sono rispettivamente eguali a tre angoli aventi il vertice A in comune e la cui somma è eguale ad un angolo piatto, ossia a due angoli retti. Il teorema è cosí dimostrato.

Uno studente che abbia frequentato dei corsi di matematica senza avere mai capito delle dimostrazioni semplici come quella ora esposta ha tutto il diritto di muovere un aspro rimprovero ai suoi professori e di biasimare la scuola in cui ha compiuto gli studi. Infatti bisognerebbe distinguere l'importanza di certe cose. Non perde molto l'alunno a cui non venga insegnato un particolare argomento di geometria; può essere che esso gli serva poi ben poco, nella vita. Ma, se non gli vengono presentate delle dimostrazioni geometriche, egli viene privato della migliore e piú semplice occasione di comprendere il significato di dimostrazione rigorosa; potrebbe essere questa l'unica occasione del genere della sua vita. Senza avere ben chiaro tale concetto, questo alunno mancherà sempre di una verità di paragone assoluta con la quale andare a confrontare le supposte evidenze di ogni tipo che gli verranno presentate in seguito, durante i contatti che egli avrà necessariamente con le manifestazioni di questa nostra epoca moderna.

Insomma, se fornire una cultura generale significa anche mettere gli studenti in grado di apprendere e distinguere i concetti di evidenza intuitiva e di ragionamento logico rigoroso, è necessario riservare un posto alle dimostrazioni geometriche.

2. *Sistema logico.* La geometria, come è esposta negli *Elementi* di Euclide, appare essere non una mera raccolta di idee, bensí un sistema logico. Gli assiomi, le definizioni, le proposizioni non vi sono elencati arbitrariamente, ma presentati secondo un ordine determinato. Ogni proposizione è introdotta in modo da risultare fondata sugli assiomi, sulle definizioni e sulle proposizioni che la precedono. Tale disposizione può veramente essere considerata il maggior merito di Euclide; in tale assetto logico sta il massimo valore degli *Elementi.*

La geometria di Euclide non è soltanto un sistema logico; è anche il primo ed il piú insigne esempio di un sistema siffatto, un esempio che venne imitato ed è imitato tuttora nell'ambito di altre scienze. È cosa giusta e conveniente che altre scienze — e soprattutto quelle molto diverse dalla geometria, come la psicologia o la giurisprudenza — tentino di adottare la rigorosa logica euclidea? Si tratta di una questione molto dibattuta; ma chi non possiede una conoscenza diretta del sistema di Euclide non può essere all'altezza di prendere parte alla discussione.

Ora, il sistema della geometria è cementato con le dimostrazioni. Ogni proposizione è legata agli assiomi, alle definizioni ed alle proposizioni che la precedono nello sviluppo della teoria per mezzo di una dimostrazione. Chi non comprende tali dimostrazioni non può capire neppure il vero significato del sistema.

Insomma, se fornire una cultura generale significa anche inculcare nelle menti degli alunni il concetto di sistema logico, è necessario riservare un posto alle dimostrazioni geometriche.

3. *Sistema mnemotecnico.* L'autore non ritiene che il concetto di evidenza intuitiva, quello di ragionamento rigoroso e quello di sistema logico siano inutili a qualcuno. Tuttavia ci sono casi in cui lo studio di tali concetti, per mancanza di tempo o per altri motivi, non è ritenuto necessario. Eppure anche in questi casi le dimostrazioni possono essere convenienti.

Le dimostrazioni avvalorano l'evidenza; cosí esse tengono connesso il sistema logico ed aiutano a ricordare la connessione fra i vari concetti. Si prenda l'esempio dianzi considerato e di nuovo ci si riferisca alla figura 23. Questa illustrazione mette in evidenza che la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°. La stessa figura collega questa verità con quella relativa alla circostanza che gli angoli alterni interni di due rette parallele tagliate da una trasversale sono eguali fra loro. E situazioni comunque connesse sono piú interessanti e piú facili da ricordare che se fossero slegate. Quindi la nostra figura fissa nella nostra mente le due suddette proposizioni di geometria e, in definitiva, la figura e la proposizione possono divenire inalienabile proprietà mentale.

Veniamo ora al caso in cui l'assimilazione di concetti generali non venga ritenuta indispensabile, mentre lo sia quella di idee particolari. Anche in tale evenienza, le situazioni devono essere presentate secondo una certa connessione e secondo qualche assetto, perché notizie isolate sono acquisite a fatica e dimenticate con estrema facilità. È qui opinabile un qualsiasi tipo di connessione atta a connettere i fatti in modo semplice, spontaneo, duraturo. Il sistema, non necessariamente fondato sulla logica, deve avere come unico scopo quello di aiutare veramente la memoria; deve essere quello che si dice un *sistema mnemotecnico.* Eppure, anche nei confronti di un sistema essenzialmente mnemotecnico, possono essere utili le dimostrazioni, soprattutto le piú semplici. Per esempio, gli studenti devono imparare la proposizione relativa alla somma degli angoli interni di un triangolo e quella relativa agli angoli alterni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale. Si può trovare un artificio piú semplice, piú spontaneo e piú efficace della figura 23 per ottenere un simile scopo?

Insomma, le dimostrazioni possono rivelarsi utili come accorgimento mnemotecnico persino quando non si attribuisca alcuna particolare importanza ai concetti logici generali.

4. *Il sistema da ricettario di cucina.* Abbiamo discusso della necessità e dell'utilità delle dimostrazioni, ma non abbiamo sostenuto che tutte le dimostrazioni debbano essere esposte *in extenso.* Al contrario, ci sono casi in cui è difficile poter procedere cosí; ne fa fede l'esempio notevole dell'insegnamento del calcolo differenziale ed integrale agli studenti di ingegneria.

Se il calcolo è presentato in conformità alle attuali esigenze di rigore, sono necessarie dimostrazioni di un certo livello di difficoltà e di precisione (quelle in cui ricorre tanto spesso la considerazione di "epsilon"). Ma i futuri ingegneri studiano tale materia in vista delle applicazioni che dovranno farne e non hanno alcuna necessità, né tempo, né disposizione, né interesse per cimentarsi con dimostrazioni troppo lunghe o per apprezzare certe finezze e precisioni logiche. Cosí si manifesta una forte tendenza ad abbreviare ogni dimostrazione. Tuttavia, in questo modo, si riduce il calcolo infinitesimale ad un livello paragonabile a quello dei ricettari di cucina.

Un ricettario fornisce una descrizione minuziosa degli ingredienti e del processo di cottura relativi ad una certa vivanda, ma nessuna dimostrazione circa la prescrizione di un cibo e nessun motivo per giustificarne la ricetta di preparazione; la dimostrazione di un dolce è l'assaggio di questo. Un ricettario può assolvere perfettamente i suoi compiti. Infatti, non è necessario possedere alcun sistema logico oppure mnemotecnico, dal momento che le ricette restano scritte oppure stampate ed è pertanto inutile conoscerle a memoria.

Invece l'autore di un testo di calcolo infinitesimale, oppure un insegnante, ben difficilmente raggiunge il suo scopo seguendo troppo da vicino il sistema di un ricettario. Se egli insegna dei procedimenti, ma non ne dimostra la validità mediante delle dimostrazioni effettive, fornirà procedimenti che non saranno mai assimilati. Se darà delle regole senza spiegarne l'origine, queste saranno presto dimenticate. La matematica non può essere dimostrata nello stesso modo di un budino; escludendo i ragionamenti di ogni genere, è facile trasformare l'insegnamento del calcolo infinitesimale in un incoerente inventario di informazioni caotiche.

5. *Dimostrazioni incomplete.* Il modo migliore di risolvere il dilemma fra dimostrazioni troppo laboriose e dimostrazioni al livello di un ricettario di cucina potrebbe essere quello di ricorrere ad un oculato impiego di dimostrazioni incomplete.

Per un logico rigoroso, una dimostrazione incompleta non è affatto una dimostrazione. E, senza dubbio, le dimostrazioni incomplete dovrebbero essere tenute ben distinte da quelle rigorose; confondere le une con le altre è una cosa cattiva, vendere le une per le altre è cosa disonesta e deleteria. È penoso vedere come certi autori di testi scolastici presentino delle dimostrazioni incomplete in forma ambigua, con palese esitazione fra il provare vergogna ed il pretendere di avere fornito una dimostrazione rigorosa. Ma le dimostrazioni incomplete possono riuscire di aiuto, se usate a tempo debito e con discrezione. Loro scopo è non sostituirsi a quelle rigorose, il che non può mai avvenire, ma è prestare interesse e coerenza all'esposizione.

Esempio 1. *Un'equazione algebrica di grado* n *ammette esattamente* n *soluzioni.* Questa proposizione, chiamata da Gauss "teorema fondamentale dell'algebra", deve essere sovente presentata ad alunni che non sono sufficientemente preparati a comprendere la corrispondente dimostrazione. Essi, però, sanno che *un'equazione algebrica di primo grado ammette una, ed una sola, soluzione* e che *un'equazione algebrica di secondo grado ammette esattamente due soluzioni.* Inoltre la difficile proposizione generale presenta una parte la cui validità si può provare facilmente: *nessuna equazione algebrica di grado* n *ammette piú di* n *soluzioni distinte.* Questa affermazione può essere considerata una dimostrazione rigorosa del teorema fondamentale? Assolutamente no. Tuttavia essa serve a prestare interesse ed evidenza a tale teorema ed a fissarlo nella mente degli alunni, che è proprio la cosa piú importante.

Esempio 2. *La somma di due qualsiasi degli angoli piani limitati dagli spigoli di un angolo triedro è maggiore del terzo angolo piano.* Ovviamente questo teorema equivale ad affermare che *in un triangolo sferico la somma di due lati qualsiasi è maggiore del terzo lato.* Avendo osservato tale equivalenza, è spontaneo pensare all'analogia fra il triangolo sferico e quello a lati rettilinei. Le precedenti osservazioni costituiscono una dimostrazione rigorosa del teorema iniziale? Assolutamente no. Esse però ci aiutano a comprenderlo e a ricordarlo.

Il primo di questi due ultimi esempi è interessante dal punto di vista storico. Per quasi 250 anni, i matematici credettero alla validità del teorema fondamentale senza averne data alcuna dimostrazione — accontentandosi proprio di spiegazioni forse ancor meno fondate di quella avanzata dianzi. Il nostro secondo esempio indica l'*Analogia* come una feconda sorgente di congetture. In matematica, come nelle scienze fisiche e naturali, spesso la scoperta ha origine dall'osservazione, dall'analogia, dall'induzione. Questi mezzi di scoperta, invocati con discernimento per inquadrare la concezione di un ragionamento euristico plausibile, interessano soprattutto i fisici e gli ingegneri (v. anche *Induzione e induzione matematica*, 1, 2, 3).

Il ruolo e l'interesse delle dimostrazioni incomplete sono illustrati, sotto un certo aspetto, dal nostro studio del processo di risoluzione dei problemi. Basta un po' d'esperienza in questo campo per riconoscere che la prima idea di una dimostrazione è spesso incompleta. L'osservazione piú importante, la connessione essenziale, il germe della dimostrazione possono essere contenuti implicitamente già in questa forma embrionale, ma in seguito si deve procedere ai dettagli e ciò può effettivamente risultare gravoso. Alcuni autori, non tutti, hanno il dono di presentare proprio solo il germe della dimostrazione, l'idea fondamentale nell'aspetto piú semplice e di accennare alla natura dei particolari in cui si deve penetrare nel seguito. Una dimostrazione di questo tipo, anche se incompleta, può risultare piú istruttiva di un'altra esposta nei minimi dettagli.

Insomma, le dimostrazioni incomplete possono essere impiegate come accorgimenti mnemotecnici (ma, naturalmente, non in sostituzione di dimostrazioni rigorose), quando si tenda ad un'esposizione coerente e non appesantita da eccessivo rigore logico.

È pericoloso difendere le dimostrazioni incomplete. Per fortuna, poche regole bastano a limitare un eventuale abuso di esse. In primo luogo, una dimostrazione che sia incompleta deve essere indicata, comunque e dovunque, come tale. Secondariamente, nessun autore o insegnante è autorizzato a presentare una dimostrazione incompleta come rigorosa a meno che non ne conosca a fondo una siffatta.

E possiamo confessare che esporre una dimostrazione incompleta in forma corretta ed elegante non è davvero cosa facile.

Saggezza dei proverbi. — Risolvere dei problemi è un'attività fondamentale dell'uomo. Infatti, la maggior parte dei nostri pensieri coscienti è rivolta a problemi. Quando non stiamo fantasticando oppure sognando ad occhi aperti, la nostra mente tende ad uno scopo preciso; cerchiamo dei metodi, tentiamo di risolvere un problema.

Non tutte le persone riescono a raggiungere i loro scopi ed a risolvere i loro problemi; chi ha piú e chi ha meno successo. Queste differenze di risultati sono notate, discusse, spesso commentate ed alcuni proverbi sembrano avere distillata la quintessenza di tali commenti. Ad ogni modo, c'è un buon numero di proverbi che caratterizzano essenzialmente i procedimenti tipici di risoluzione dei problemi, i ricorsi al buon senso che essa implica, gli espedienti piú comuni e gli errori piú frequenti. Nei proverbi, si nota spesso qualche sfumatura di sottile ironia: naturalmente essi non rientrano in alcun sistema scientifico atto a dissipare ogni nota di leggerezza o di sottinteso. Invece piú di un proverbio può essere posto in relazione con un altro che fornisce un consiglio opposto e ciò consente una grande libertà di interpretazione. Sarebbe stolto colui che considerasse i proverbi come una fonte autorevole di saggezza universalmente attendibile, ma commetterebbe un grave errore chi trascurasse del tutto l'efficace descrizione dei procedimenti euristici fornita da essi.

Può essere un esercizio interessante raccogliere e raggruppare i proverbi relativi alla realizzazione di un progetto, alla ricerca di un mezzo, alla scelta di una linea di condotta, insomma i proverbi che possono essere riferiti alla risoluzione dei problemi. Disponiamo a questo punto di uno spazio molto limitato rispetto a quello che ci occorrerebbe per svolgere un simile esercizio; dunque non ci resta che procedere nel modo forse migliore, ossia enunciare qualche proverbio atto ad illustrare in particolare le principali fasi della risoluzione, cioè quelle fasi su cui abbiamo richiamato l'attenzione nel nostro schema e discusso nei paragrafi 6-14 e altrove. Tali proverbi verranno scritti in corsivo.

1. Come prima cosa, bisogna ben comprendere il problema: *Chi male comprende, male risponde.* Il fine a cui si tende deve sempre essere tenuto presente: *Prima di cominciare, si pensi dove si vuole terminare.* Questo è ricavato dall'antico motto latino "respice finem". Purtroppo pochi seguono un cosí saggio consiglio e spesso si comincia a pensare, a parlare, persino ad agire senza avere compreso quale sia lo scopo vero per cui ci si affanna tanto. *Lo stolto guarda l'inizio dell'opera, il saggio la fine.* È facile deviare dal problema e perdersi per via, se non si ha ben chiaro il punto cui si desidera arrivare. *Il saggio comincia dalla fine, lo stolto resta al principio.*

La comprensione del problema non è sufficiente; è necessario anche desiderare di ottenere una soluzione. Non c'è alcuna probabilità di risolvere un problema, se non si vuole ardentemente conoscerne il risultato; tale ansia è per se stessa una probabilità di successo. *Volere è potere.*

2. La conquista fondamentale nella risoluzione di un problema è la concezione di un piano, di un'idea, di un'azione conveniente.

Una buona idea è un poco di buona fortuna, un dono degli dei; essa non va sciupata: *La costanza è madre alla fortuna. Vince chi insiste. Molto pochi fanno un assai. Se insisti e resisti, raggiungi e conquisti.* Non basta, però, tentare ripetutamente; occorre provare diversi metodi, variare gli approcci. *Prova sempre tutte le chiavi del mazzo. Con legno di ogni qualità si può costruire una freccia. Chi non risica, non rosica.* Naturalmente i tentativi vanno scelti tenendo conto delle particolari circostanze. *Si spieghino le vele quando si alza il vento. Misura il passo secondo la gamba. Fa' ciò che puoi, se non puoi fare ciò che vuoi.* Se ci si accorge di avere sbagliato, si torni da capo e si tenti un'altra via: *Il saggio cambia parere, lo stolto mai.* Anzi, già all'inizio bisognerebbe prendere in considerazione l'eventualità che un piano fallisca e tenerne pronto uno di riserva. *Metti sempre due corde al tuo arco.* È chiaro che si può esagerare in simili cambiamenti di piani e quindi perdere del tempo prezioso. Allora si può ricordare il commento ironico: *Fare e rifare è tutto un lavorare.* Si ha minore probabilità di procedere sventatamente quando si cerchi di non perdere di vista lo scopo a cui si mira. *Chi dorme non piglia pesci.*

Spesso ci affanniamo a ricordare qualcosa che potrebbe tornare utile e poi, quando ci viene alla mente un'idea che potrebbe veramente esserci di aiuto, non ci rendiamo conto della sua importanza. Un matematico con una certa esperienza forse non ha piú idee di un principiante, ma sa apprezzare ed usare meglio ciò che sa. *Il saggio ha piú occasioni di quelle che gli si presentano. Necessità aguzza l'ingegno. L'accorto sa mutare rischio in fortuna.* Un esperto, eventualmente, è avvantaggiato perché è sempre alla ricerca di occasioni. *Si tenga d'occhio la probabilità piú forte.*

3. Lo sviluppo del piano va iniziato al momento giusto, quand'esso è maturo, non prima. Non si deve prendere l'avvio sconsideratamente. *Chi va piano va sano e va lontano. Con il tempo e la paglia maturano le nespole. Uomo avvisato è mezzo salvato.* D'altra parte non si può esitare troppo a lungo. *Chi vuol navi-*

gare senza pericolo non si metta per mare. La fortuna assiste gli audaci. Aiutati che il ciel t'aiuta.

Il buon senso ed il raziocinio indicano il momento preciso. E, a tale proposito, citiamo un detto che mette in risalto l'errore piú comune, l'atteggiamento piú consueto: *Si crede facilmente a ciò che si vuole.*

Un piano di risoluzione, di solito, suggerisce soltanto una linea di condotta, uno schema di carattere generale. Si tratta di convincersi che i casi particolari rientrano in tale schema e quindi ogni dettaglio va accuratamente analizzato. *Si arriva in cima ad una scala salendo un gradino alla volta. A poco a poco, come fa il gatto con il topo. Il mondo non venne creato in un solo giorno.*

Nello sviluppo di un piano, occorre avere cura di presentare i passaggi secondo un ordine particolare che spesso è proprio l'opposto di quello secondo il quale essi sono stati scoperti. *Il saggio fa per prima cosa quella che lo stolto fa per ultima.*

4. Riflettere sulla stesura definitiva della risoluzione costituisce una fase importante ed istruttiva del problema. *Non pensa bene chi non pensa troppo. I secondi pensieri sono sempre i migliori.*

Esaminando ulteriormente la risoluzione, si può scoprire un'altra conferma del risultato. Si deve fare rilevare al principiante che un'altra conferma del genere è di notevole valore, che due dimostrazioni valgono piú di una sola. *È prudente gettare sempre due ancore.*

5. L'elenco dei proverbi che possono essere riferiti alla risoluzione dei problemi non si esaurisce qui; ma tanti altri motti che potrebbero essere citati esprimono non nuovi ammonimenti, bensí solo variazioni sui temi dianzi considerati. Alcuni aspetti piú sistematici ed involuti del processo di risoluzione difficilmente rientrano nel campo di validità della saggezza dei proverbi.

Per illustrare tali aspetti della risoluzione, l'autore tenta, di tanto in tanto, di coniare nuovi proverbi; ma non è una cosa facile. Ecco alcuni risultati dei suoi sforzi: proverbi "sintetici" che descrivono atteggiamenti un poco piú complicati.

Il fine suggerisce i mezzi.

I cinque migliori amici del matematico sono Cosa, Perché, Dove, Quando e Come. Egli si chiede: "Cosa? Perché? Dove? Quando? Come?"; né si chiede altro, se ha bisogno di un'informazione.

Non fidarsi mai, ma dubitare solo quando ce ne sia un motivo.

Dopo avere trovato il primo fungo, o fatto la prima scoperta, ci si guardi attentamente intorno; funghi e scoperte non vengono mai soli.

Procedendo a ritroso. — Per comprendere il comportamento degli uomini, si dovrebbe paragonare il loro modo di agire con quello degli animali, che pure hanno dei "problemi" e "risolvono" dei problemi. La psicologia sperimentale ha compiuto progressi essenziali negli ultimi anni, proprio indagando intorno alla facoltà di risolvere problemi presentata dagli animali. Non possiamo soffermarci qui a descrivere queste indagini, illustrandone schematicamente una sola, molto semplice ed istruttiva però; tale descrizione fungerà da commento sul metodo di analisi, o "processo a ritroso", sul quale abbiamo già discusso in questo volume. Infatti, nel paragrafo intitolato *Pappo*, ne fornimmo una spiegazione particolareggiata.

1. Si voglia rispondere al seguente complicato quesito: *Come si può togliere da un fiume esattamente sei quarti di acqua disponendo solo di due recipienti con cui misurare, un secchio da quattro quarti ed uno da nove quarti?*

Cerchiamo di raffigurarci chiaramente i mezzi di cui disponiamo, ossia i due recipienti. (*Cosa è dato?*) Immaginiamo due contenitori cilindrici aventi eguale base e altezze rispettivamente di 9 e di 4 unità di misura di lunghezza (v. fig. 24). *Se* sulla su-

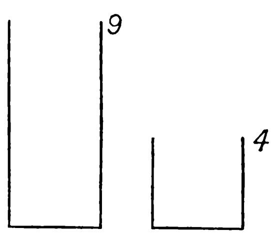


Fig. 24.

perficie laterale di ogni recipiente fosse segnata una graduazione alla quale potessimo riferire l'altezza del livello dell'acqua, il problema sarebbe piú facile. Ma poiché non è segnata nessuna scala del genere, siamo ancora lontani dalla soluzione.

Non sappiamo, a questo punto, come misurare esattamente sei quarti di acqua; ma potremmo misurare qualcosa d'altro? (*Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di ri-*

solvere prima qualche problema connesso con questo. Si può ricavare qualche informazione utile dai dati?) Non restiamo inattivi, tentiamo qualche approccio. Potremmo riempire il recipiente piú capace fino all'orlo e poi vuotare quanta piú acqua possibile in quello piú piccolo; cosí potremmo ottenere esattamente cinque quarti di acqua. Come ottenerne sei quarti? Abbiamo sempre i due recipienti. Potremmo anche...

Ci stiamo comportando come la maggior parte di coloro ai quali viene proposto questo giochetto. Partiamo dalla considerazione dei due recipienti vuoti, tentiamo vari procedimenti, vuotiamo e riempiamo; e, non ottenendo alcun risultato soddisfacente, ricominciamo da capo in un modo ancora diverso. Stiamo *procedendo direttamente*, dalla situazione iniziale assegnata a quella finale richiesta, dai dati all'incognita. Possiamo riuscire, dopo molti tentativi, ma per puro e semplice caso.

2. Invece qualcuno particolarmente abile, o che abbia avuto l'occasione di apprendere durante il suo curriculum scolastico qualcosa di piú delle banali operazioni di routine, non perde troppo tempo in simili esperimenti, ma li trascura procedendo a ritroso.

Cosa si chiede di cercare? (*Qual è l'incognita?*) Cerchiamo di raffigurarci la situazione finale, a cui tendiamo, nel modo piú chiaro possibile. Immaginiamo di avere davanti a noi i due re-

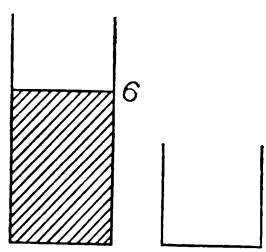


Fig 25.

cipienti, nel piú capace dei quali siano contenuti esattamente sei quarti di acqua mentre il secondo sia vuoto (v. fig. 25). (*Si parta da ciò che si vuole ottenere e lo si supponga noto*, consiglia Pappo.)

Da quale situazione precedente può essere ricavata quella finale richiesta, che è illustrata nella figura 25? (*Si cerchi di scoprire da quale risultato precedente può essere dedotto quello richiesto*, ammonisce Pappo.) Naturalmente, si potrebbe riempire il recipiente piú capace fino all'orlo, ossia versare in esso nove quarti di acqua. Ma allora dovremmo essere in grado anche di separarne tre quarti. A tale scopo... dobbiamo averne un solo quarto nel recipiente piú piccolo! Questa è l'idea (v. fig. 26).

(Il passaggio ora eseguito, in realtà, non è intuitivo. Pochi sono in grado di accettarlo senza un po' di esitazione. Infatti,

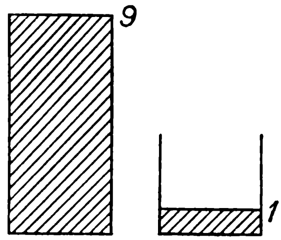


Fig. 26.

riconoscendo l'efficacia di tale osservazione, si prevede la linea di sviluppo della risoluzione che ora esporremo.)

Ma come giungere alla configurazione descritta qui sopra ed illustrata nella figura 26? (*È necessario determinare quale potrebbe essere il risultato che implica quello precedente al richiesto.*) Poiché l'acqua di un fiume è praticamente infinita in quan-

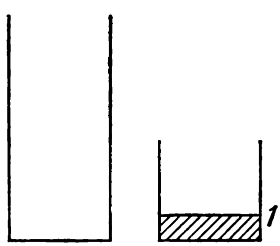


Fig. 27.

tità, la figura 26 e la figura 27, oppure la figura 28, mostrano situazioni equivalenti.

Si riconosce facilmente che, realizzando una qualunque delle tre situazioni illustrate nelle figure 26, 27 e 28, si può pervenire altrettanto speditamente a ciascuna delle altre due; ma non è facile puntare verso la situazione della figura 28, *se essa non sia stata vista prima*, se non sia stata incontrata per caso in uno dei tentativi iniziali. Trastullandosi con i due recipienti, si può avere osservato qualcosa di analogo e, forse, a questo punto, cioè al momento opportuno, si ricorda che è possibile derivare tale situazione da quella indicata nella figura 29. Si riempie fino all'orlo il recipiente maggiore e poi si versano da esso quattro quarti di acqua in quello meno capace e di qui nel fiume; cosí per due vol-

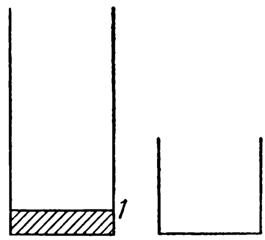


Fig. 28.

te. *Si perviene alla fine ad un'informazione già nota* (come dice Pappo) e, mediante un processo d'analisi, *procedendo a ritroso* si scopre il conveniente ordine di successione delle operazioni.

In realtà, si è cosí trovato l'ordine di successione delle operazioni conveniente, ma invertito; resta ora da *invertire il procedimento*, ossia occorre *partire dall'ultimo risultato ottenuto con*

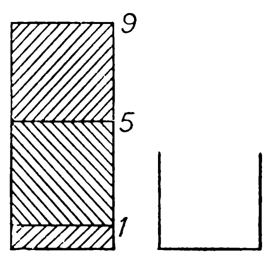


Fig. 29.

l'analisi (secondo Pappo). Per prima cosa si eseguano allora le operazioni indicate nella figura 29, al fine di realizzare la situazione della figura 28; da questa si passi a quella della figura 27 e di qui a quella della figura 26 e finalmente alla configurazione della figura 25. *Ricalcando le proprie orme, si riesce infine a trovare la risoluzione cercata.*

3. La tradizione greca attribuí a Platone la scoperta dell'ana-

lisi. Non si tratta di una notizia attendibile, ma, se questo metodo non fu inventato dal sommo filosofo, è comunque evidente che fu qualche suo discepolo a compiere tale conquista e che questi ritenne doveroso lasciarne il merito all'insigne maestro.

In effetti in questo procedimento c'è qualcosa di molto profondo. Raggirare l'ostacolo, allontanarsi dalla meta, procedere a ritroso, seguire un cammino indiretto per conseguire lo scopo sono manifestazioni che implicano una certa difficoltà dal punto di vista filosofico. Una volta scoperta la successione delle operazioni opportune, la mente deve procedere secondo l'ordine opposto a quello dell'effettiva esecuzione. Questa inversione può generare una specie di ripugnanza psicologica e ciò alle volte impedisce agli studenti di comprendere bene l'attuale metodo, se esso non è presentato loro con molta precisione.

Eppure non è necessario essere geniali per risolvere un problema concreto procedendo a ritroso; basta un po' di buon senso. Si fissa l'attenzione sul risultato richiesto e si visualizza la situazione finale quale dovrebbe essere. Da quale precedente configurazione essa si può ottenere? È spontaneo porsi un simile quesito e tale domanda implica già procedere a ritroso. Nell'applicazione di questo metodo, si presentano spontaneamente problemi molto semplici (v. *Pappo*, 4).

Procedere a ritroso è conforme al buon senso; è un metodo alla portata di tutti; probabilmente esso fu impiegato da matematici e anche da altri già prima di Platone. La scoperta che qualche discepolo di questo filosofo greco volle attribuire al genio del maestro certo consiste nell'avere esposto il procedimento sotto forma generale, cioè conferendogli il carattere di operazione particolarmente efficace per la risoluzione dei problemi matematici o di altro genere.

4. Ed ora torniamo agli esperimenti di psicologia, sperando che ci sia perdonato il brusco passaggio da Platone ai cani, alle galline e alle scimmie. Come mostra la figura 30, dei quattro lati di un recinto rettangolare uno solo è aperto, mentre gli altri tre sono limitati da cancellate. Si pone un cane davanti ad una delle cancellate, e precisamente nel punto *D*; al di là delle sbarre, in *F*, è posto del cibo. Per il cane si tratta di un problema molto semplice. È probabile che esso tenti prima di raggiungere il cibo allungando una zampa fra le sbarre; ma, se questo tentativo resta infruttuoso, si gira rapidamente, raggiunge in un lampo il limite aperto del recinto e, correndo senza esitazione alcuna, si impossessa del cibo afferrandolo in curva. Ma qualche volta, soprattut-

to quando i punti D e F sono molto vicini, la soluzione non è cosí immediata; il cane può affannarsi, perdendo tempo, ad abbaiare, ad annaspare, a saltare contro le sbarre, prima di "concepire l'idea luminosa" di raggiungere il cibo dall'esterno.

È interessante notare il comportamento di diversi animali. Il problema è facilissimo per uno scimpanzé, oppure per un bimbo di circa quattro anni (sul quale un giocattolo può esercitare maggiore attrazione del cibo). Ma il medesimo problema rivela difficoltà sorprendenti per una gallina che, eccitatissima, comincia, in generale, a correre avanti e indietro lungo il margine della cancellata che le sta di fronte e perde un'infinità di tempo prima di

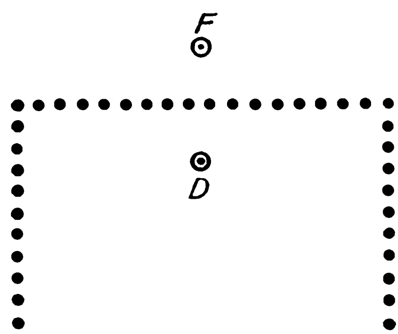


Fig. 30.

raggiungere il cibo, ammesso che essa esca fuori ad un certo momento. Se ciò avviene, sia detto per precisione, è per puro caso.

5. Non vorremmo dilungarci sopra un solo esperimento che, fra l'altro, abbiamo riferito in modo estremamente schematico. Tuttavia non è forse inutile richiamare l'attenzione del lettore sopra alcune evidenti analogie, ammettendo di essere ora in grado di scoprirle e di tenerne un debito conto.

Girare intorno all'ostacolo è proprio quello che si fa di solito quando si debba risolvere un problema; l'esperimento descritto poco fa comincia intanto ad assumere un significato simbolico. La gallina sta a rappresentare quel tipo di persone che risolvono i loro problemi facendo un mucchio di confusione, tentando e ritentando senza seguire alcun piano ordinato, pervenendo infine alla soluzione per caso e con molta fortuna senza rendersi conto del motivo del loro successo. Il cane, che abbaia, annaspa e salta contro la cancellata del recinto prima di uscire all'esterno, risolve il suo problema proprio come abbiamo fatto noi con quello dei due recipienti e dell'acqua del fiume. Il pensare ad una graduazione a cui riferire l'altezza del livello del liquido equivale ad annaspare inutilmente, indicando solo di avere notato la necessità di considerare quantità di acqua inferiori a quelle che i recipienti possono contenere. Cercammo dapprima di procedere direttamente e in un secondo tempo concepimmo l'idea di ricorrere a un processo a ritroso. Il cane, che dopo un rapido esame della situazione si volta ed esce dal recinto, sembra dotato, checché si dica, di un intuito superiore.

No, non si sorrida neppure della goffaggine della gallina! Senza dubbio è abbastanza difficile raggirare l'ostacolo, allontanarsi dalla meta, procedere a ritroso, seguire un cammino indiretto per conseguire lo scopo. Le difficoltà incontrate dalla gallina sono analoghe a quelle che incontriamo noi nella risoluzione dei problemi.

Parte quarta

Problemi, suggerimenti, risoluzioni

Problemi, suggerimenti, risoluzioni

Quest'ultima parte offre al lettore l'occasione di esercitarsi ulteriormente.

La risoluzione dei quesiti proposti nelle pagine che seguiranno richiede solo una cultura matematica normale, come il lettore potrebbe avere acquisito frequentando una buona scuola secondaria. Gli esercizi non sono però eccessivamente facili, non essendo problemi di routine; alcuni di essi esigono vivacità d'ingegno e prontezza d'intuizione.[1]

I suggerimenti forniscono indicazioni per pervenire rapidamente al risultato e a tale scopo richiamano quasi sempre una conveniente proposizione del nostro schema; possono effettivamente suggerire l'idea essenziale, da cui ricavare la risoluzione, ad un lettore che ne sappia fare tesoro.

Le risoluzioni indicano non soltanto la risposta, ma anche il procedimento che conduce a questa, benché, naturalmente, esse lascino al lettore il compito di entrare nei dettagli. Alcune risoluzioni presentano alla fine poche parole di commento atte a determinare ulteriori visioni del problema.

Il lettore che abbia tentato seriamente di risolvere un problema da solo è quello che ha maggiore probabilità di ricavare qualche profitto dal suggerimento e dalla risoluzione corrispondenti al medesimo esercizio. Se egli ottiene il risultato con mezzi propri, può imparare molto confrontando il suo procedimento con quello riferito nel testo. Se, dopo un'applicazione coscienzio-

All'infuori del Problema I (notissimo, ma troppo divertente per potere essere omesso) tutti gli esercizi sono tratti dai testi delle *Gare matematiche* dell'università di Stanford. Alcuni di essi sono già stati pubblicati in *The American Mathematical Monthly,* oppure, in *The California Mathematics Council Bulletin.* In quest'ultimo periodico, furono riferite anche alcune risoluzioni dovute all'autore e che in seguito furono opportunamente rielaborate.

sa, egli è tentato di darsi per vinto, il suggerimento può aiutarlo bisbigliandogli un'idea felice. Se poi neppure il suggerimento si rivela efficace, il lettore può sempre scorrere la risoluzione, cercare di individuare il concetto fondamentale di questa, chiudere di nuovo il libro e sforzarsi di ritrovare da solo il risultato esatto.[2]

Problemi

1. Un orso, inizialmente in un punto P, si sposta di due miglia verso sud. Poi esso cambia direzione e percorre un miglio verso est. Infine si volge a sinistra e cosí, dopo avere percorso due miglia verso nord, si ritrova esattamente al punto P di partenza. Di che colore è la pelliccia di questo orso?

2. Roberto vuole comperare un appezzamento di terreno perfettamente piano, racchiuso da quattro linee di confine tali che due di esse abbiano proprio la direzione nord-sud e le altre due est-ovest; ciascuno dei quattro limiti infine deve misurare esattamente 100 piedi. Può Roberto comperare una siffatta porzione di terreno negli Stati Uniti?

3. Roberto ha in tasca 10 fazzoletti e 44 dollari d'argento; egli vuole distribuire le monete nei fazzoletti, in modo che ogni fazzoletto contenga una diversa somma di denaro. È possibile?

4. Per numerare le pagine di un grosso volume, un tipografo ha usato 2989 cifre. Quante pagine ha quel volume?

5. Fra le carte del nonno, è stata rinvenuta una fattura:

72 tacchini, dollari — 67.9 —.

La prima e l'ultima cifra del numero che esprime senza dubbio il costo totale di quell'acquisto sono illeggibili e quindi sono qui state sostituite con due trattini.

Quali sono le due cifre mancanti e qual era il costo di un tacchino?

6. Sopra un piano sono dati un esagono regolare ed un pun-

[2] Considerando l'origine (v. la nota 1) e lo scopo di questi esercizi per le consuete convenzioni relative alla diffusione di tali problemi saranno mantenuti le medesime unità di misura ed il medesimo sistema monetario adottati nel testo originale. [*N.d.T.*]

to. Condurre per il punto una retta che divida l'esagono in due parti equivalenti.

7. È dato un quadrato. Determinare il luogo geometrico dei punti del piano dai quali il quadrato è visto sotto un angolo di

$$a)\ 90°,\ b)\ 45°.$$

(Sia P un punto del piano del quadrato, ma esterno a tale parallelogrammo. Dicesi "angolo sotto cui il quadrato è visto" da P l'angolo di vertice P e di minima ampiezza che racchiude il quadrato.) Illustrare chiaramente i due luoghi e darne una descrizione completa.

8. Si dica "asse" di un solido una retta congiungente due punti della superficie di esso e tale che questo, fatto ruotare intorno ad una retta siffatta di un angolo la cui ampiezza sia maggiore di 0° ma minore di 360°, vada a coincidere con se stesso.

Determinare gli assi del cubo. Individuare la precisa configurazione di tali assi e precisare l'angolo di rotazione associato a ciascuno di essi. Nell'ipotesi che il cubo abbia spigolo unitario, si calcoli la media aritmetica delle misure delle lunghezze dei segmenti di assi interni al solido considerato.

9. In un tetraedro (non necessariamente regolare) due spigoli opposti hanno eguale lunghezza a e sono mutuamente ortogonali. Inoltre entrambi risultano perpendicolari al segmento di lunghezza b che congiunge i loro punti medi. Si esprima il volume del tetraedro in funzione di a e b e si verifichi il risultato.

10. Il vertice opposto alla base di una piramide dicesi *apice*.

a) Chiamiamo *isoscele* ogni piramide il cui apice sia equidistante da tutti i *vertici* della base. Adottando tale definizione, si dimostri che la base di una piramide isoscele è *inscrittibile* in una circonferenza il cui centro coincide con il piede dell'altezza del solido.

b) Chiamiamo ora *isoscele* ogni piramide il cui apice sia equidistante da tutti gli *spigoli* della base. Adottando questa definizione (distinta dalla precedente), si dimostri che la base di ogni piramide isoscele è *circoscrittibile* ad una circonferenza il cui centro coincide con il piede dell'altezza del solido.

11. Risolvere il seguente sistema di quattro equazioni nelle incognite x, y, u e v:

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16 \end{aligned}$$

(A prima vista ciò sembra lungo e laborioso: si cerchi un procedimento rapido.)

12. Roberto, Pietro e Paolo decidono di compiere una passeggiata insieme. Pietro e Paolo sono buoni camminatori e ciascuno di essi percorre in media p miglia all'ora. Roberto ha una gamba malata e, non potendo camminare, si sposta guidando una piccola vettura che può contenere due, e non piú di due, persone tenendo una velocità media di v miglia all'ora. I tre amici stabiliscono questo accordo. Partiranno insieme Paolo e Roberto in macchina e Pietro a piedi. Dopo un poco, Paolo scenderà e proseguirà a piedi, mentre Roberto tornerà indietro a prelevare Pietro; in vettura, Roberto e Pietro raggiungeranno Paolo. A questo punto Pietro e Paolo si scambieranno i ruoli: Paolo salirà in macchina con Roberto e Pietro procederà a piedi, come all'inizio. Lo scambio sarà ripetuto tante volte quante occorrerà.

a) Quale distanza (quante miglia) coprirà la comitiva in un'ora?

b) Durante quale frazione dell'intera durata del percorso Roberto sarà solo in automobile?

c) Si esaminino i casi limite corrispondenti a $p = 0$ e $p = v$.

13. Tre numeri sono in progressione aritmetica ed altri tre in progressione geometrica. Addizionando gli elementi corrispondenti delle due proporzioni, si ottiene ordinatamente

$$85, \ 76 \text{ e } 84;$$

invece la somma dei tre elementi in progressione aritmetica è eguale a 126. Si determinino gli elementi di ciascuna progressione.

14. Determinare m in modo che la seguente equazione in x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

ammetta quattro radici reali che siano elementi consecutivi di una progressione aritmetica.

15. Il perimetro di un triangolo rettangolo misura 60 pollici

e l'altezza relativa all'ipotenusa 12 pollici. Si calcolino le misure dei cateti.

16. Dalla vetta di una montagna si vedono due punti, A e B, della pianura sottostante. I raggi di visuale terminanti a detti punti comprendono l'angolo γ. Rispetto ad un piano orizzontale, l'inclinazione del primo e quella del secondo raggio di visuale sono rispettivamente α e β. Si sa che A e B hanno la medesima quota e che la loro distanza è c.

Si esprima la quota x della vetta rispetto al livello comune di A e B in funzione degli angoli α, β e γ e della distanza c.

17. Si verifichi che, rispettivamente per $n = 1, 2, 3$, il valore dell'espressione

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

è $1/2$, $5/6$, $23/24$. Si cerchi di individuare la legge generale che conduce a tali risultati (se necessario, considerando a questo scopo ulteriori valori assunti dalla stessa espressione in corrispondenza di altri valori di n) e si verifichi la validità del presunto risultato.

18. Si consideri la seguente tabella:

$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 1 \\ 3 + 5 & = & 8 \\ 7 + 9 + 11 & = & 27 \\ 13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 & = & 125. \end{array}$$

Si risalga alla legge generale ivi implicitamente contenuta e, dopo averla enunciata ricorrendo ad un conveniente sistema di notazioni matematiche, se ne dimostri la validità.

19. Sia n (n numero intero positivo) la misura, rispetto ad una unità prefissata, della lunghezza del lato di un esagono regolare. Con rette parallele ed equidistanti dai lati si divida l'esagono in T triangoli equilateri tutti di lato unitario. Sia V il numero dei vertici che compaiono con tale suddivisione ed L quello dei lati di frontiera di lunghezza unitaria. (Un lato dicesi "di frontiera" quando appartiene ad uno oppure due triangoli, un vertice quando è comune a due o piú triangoli.) Nel caso piú semplice, ossia per $n = 1$, si ottiene: $T = 6$, $V = 7$, $L = 12$. Si consideri

il caso generale e si esprimano T, V ed L in funzione di n. (È sufficiente avanzare delle previsioni, ma meglio sarebbe procedere poi ad una dimostrazione di esse.)

20. In quanti modi si può cambiare un dollaro? (Si ritiene individuato un processo di cambio quando sia noto il numero delle monete di ogni tipo necessario, ossia il numero di cents, nickels, dimes, quarters e mezzi dollari indispensabili a tale scopo.)

Suggerimenti

1. *Qual è l'incognita?* Il colore della pelliccia di un orso — ma come si può ricavare il colore della pelliccia di un orso da dati di natura matematica? *Quali sono i dati?* Un'illustrazione geometrica — ma essa sembra contraddittoria in termini: come è possibile che l'orso, dopo avere percorso tre miglia nel modo descritto, si ritrovi al punto di partenza?

2. *È noto un problema connesso con questo?*

3. Roberto ha davvero molte monete e perciò non dovrebbe incontrare eccessive difficoltà a distribuirle come vuole l'esercizio. *Si può enunciare il problema in altra forma?* Qual è il minimo numero di monete che egli può mettere in ciascuno dei dieci fazzoletti in modo che nessuno di questi contenga una stessa somma?

4. *Ecco un problema connesso con quello proposto*: se il volume avesse solo 9 pagine numerate, quante cifre sarebbero necessarie al tipografo? Naturalmente solo 9 cifre. *Ecco un altro problema connesso con quello proposto*: se il volume avesse solo 99 pagine numerate, quante cifre sarebbero necessarie al tipografo?

5. *Si può enunciare il problema in altra forma?* Quali possono essere le due cifre incognite se il costo totale, espresso in dollari, deve essere divisibile per 72?

6. *Si sa inventare un problema connesso con quello proposto ma piú accessibile? Ed uno piú generale? Ed uno analogo?* (v. *Generalizzazione*, 2).

7. *È noto un problema connesso con questo?* Il luogo geometrico dei punti di un piano dai quali un segmento assegnato è visto sotto un angolo dato è costituito da due archi di circon-

ferenza passanti per gli estremi del segmento e simmetrici rispetto ad esso.

8. Si suppone che il lettore abbia ben presente la forma di un cubo e che abbia scoperto certi assi già ad un primo esame — ma quelli trovati sono *tutti* gli assi? *Si può dimostrare* che l'insieme degli assi trovati è completo? Tale elenco presenta un chiaro carattere di classificazione?

9. *Si rifletta sull'incognita!* L'incognita è il volume di un tetraedro — sí, è noto che il volume di un tetraedro può essere calcolato quando siano note l'area della superficie di base e l'altezza del solido (basta dividere per 3 il prodotto di queste grandezze), ma in questo caso non si conosce né l'una né l'altra. *Si sa inventare un problema connesso con quello proposto, ma piú accessibile?* (Non si vede un tetraedro piú conveniente, parte aliquota di quello assegnato?)

10. *È noto un teorema connesso con questo? È noto un teorema* connesso con questo... piú semplice... *analogo?* Sí: il piede dell'altezza di una piramide è il punto medio della base di un triangolo isoscele. *Ecco un teorema connesso con quello proposto e dimostrato precedentemente. Si può sfruttare... il processo della sua dimostrazione?* Il teorema sul triangolo segue dalla considerazione di due triangoli congruenti aventi la suddetta altezza come cateto comune.

11. Si suppone che il lettore abbia una certa familiarità con i sistemi di equazioni lineari. Per risolvere un sistema di questo tipo si può ricorrere ad una qualunque opportuna combinazione delle sue equazioni — si cerchino quindi delle relazioni fra le equazioni assegnate che suggeriscano una combinazione particolarmente vantaggiosa.

12. *Si separino le varie parti della condizione. Si possono scrivere queste separatamente?* Nell'intervallo di tempo che intercorre fra l'istante di partenza e quello in cui i tre amici si trovano di nuovo riuniti, si distinguono nettamente tre fasi:

1) Roberto è in macchina con Paolo,
2) Roberto è in macchina da solo,
3) Roberto è in macchina con Pietro.

Si indichino le durate delle tre fasi rispettivamente con t_1, t_2, t_3. Allora come si può dividere in modo vantaggioso la condizione?

13. *Si separino le varie parti della condizione. Si possono scrivere queste separatamente?* Si denotino i tre numeri in progressione aritmetica ordinatamente

$$a-d, \quad a, \quad a+d$$

ed i tre in progressione geometrica ordinatamente

$$bg^{-1}, \quad b, \quad bg.$$

14. *Qual è la condizione?* Le quattro radici dell'equazione devono formare una progressione aritmetica. Inoltre l'equazione presenta un aspetto caratteristico: essa contiene l'incognita x elevata soltanto a potenze pari. Quindi, se a è una sua soluzione, anche $-a$ è tale.

15. *Si separino le varie parti della condizione. Si possono scrivere queste separatamente?* Nella condizione, si possono distinguere tre parti ordinatamente corrispondenti

1) al perimetro,
2) al triangolo rettangolo,
3) all'altezza relativa all'ipotenusa.

16. *Si separino le varie parti della condizione. Si possono scrivere queste separatamente?* Siano a e b le lunghezze dei raggi di visuale incognite ed α e β le corrispondenti inclinazioni rispetto ad un piano orizzontale. Si possono distinguere tre parti di condizione, ordinatamente relative

1) all'inclinazione del raggio di visuale di lunghezza a,
2) all'inclinazione del raggio di visuale di lunghezza b,
3) al triangolo di lati a, b, c.

17. Cosa si può dire intorno ai denominatori 2, 6, 24? *È noto un problema connesso con questo? Ed un problema analogo?* (v. *Induzione e induzione matematica*).

18. L'applicazione del metodo di induzione esige spirito di osservazione. Si fissi l'attenzione sui secondi membri delle eguaglianze assegnate, sul primo e sull'ultimo termine che figurano in ciascuno dei primi membri. Qual è la legge generale richiesta?

19. *Si disegni una figura.* Dall'osservazione di essa, può scaturire per induzione la scoperta della legge richiesta, oppure quella di relazioni notevoli intercedenti fra T, V, L ed n.

20. *Qual è l'incognita? Cosa si vuole determinare?* Può essere che persino lo scopo del problema vada chiarito. *Si sa inventare un problema connesso con quello proposto, ma piú accessibile? Ed uno piú generale? Ed uno analogo?* Ecco un problema analogo *davvero* molto semplice: In quanti modi si può pagare la somma di un cent? (Evidentemente solo in un modo.) Ecco un problema piú generale: In quanti modi si può pagare la somma di n cents disponendo di monete dei seguenti cinque tipi: cents, nickels, dimes, quarters e mezzi dollari? Interessa soprattutto il caso particolare corrispondente ad $n = 100$.

Nei casi particolari piú semplici, relativi a valori di n minori di 100, si può pervenire ad una risposta senza eseguire alcun procedimento specifico, ma semplicemente per tentativi. Ecco una tabella ridotta che il lettore dovrebbe verificare:

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13.

Nella prima riga sono elencate le somme, in cents, che si devono pagare e nella seconda il numero corrispondente delle possibili "modalità di pagamento"; il numero dei cents di cui si dispone e quello delle possibili modalità di pagamento sono indicate, qui e nel seguito, rispettivamente con n ed E_n. (Il motivo della scelta proprio di quest'ultima notazione è un segreto che per ora non ho intenzione di svelare.)

Quello che interessa maggiormente è E_{100}, ma vi sono poche speranze di potere determinare E_{100} senza un processo ben definito. Infatti questo problema esige che il lettore si impegni molto seriamente; esige la *creazione* di una breve *teoria.*

Si tratta di una questione generale (calcolare E_n per un generico n), ma apparentemente slegata da altri problemi. *Si sa inventare un problema connesso con quello proposto ma piú accessibile? Ed uno analogo?* Ecco un problema analogo *davvero* molto semplice: Si calcoli A_n, ossia il numero dei modi in cui può essere pagata la somma di n cents disponendo solo di cents. ($A_n = 1$.)

Risoluzioni

1. Si pensa che la pelliccia dell'orso sia bianca e che il punto P sia il Polo nord? *Si può dimostrare la validità di questa*

congettura? Cerchiamo di visualizzare il problema. Consideriamo la Terra perfettamente sferica e l'orso come un punto materiale che, muovendosi in direzione sud o in direzione nord, descrive un arco di *meridiano*, mentre, muovendosi in direzione est, descrive un arco di *parallelo*. Dobbiamo distinguere due casi.

1) Se l'orso torna al punto P lungo un meridiano *diverso* da quello lungo il quale si è mosso allontanandosi dal medesimo punto, allora P è effettivamente il Polo nord. Infatti due meridiani distinti si incontrano solo ai due poli, ma si deve escludere che P sia il Polo sud perché, in tale ipotesi, l'orso avrebbe potuto abbandonare la sua posizione iniziale soltanto spostandosi verso nord e non verso sud, come invece afferma l'enunciato del problema.

2) L'orso potrebbe ritornare in P lungo lo stesso meridiano sul quale si è allontanato dallo stesso punto soltanto se, percorrendo un miglio in direzione est, percorre un intero parallelo esattamente n volte, essendo n un generico numero intero. In questo caso P non è il Polo nord, ma un punto situato sopra un parallelo molto prossimo al Polo sud. In realtà, la lunghezza della circonferenza di un tale parallelo, espressa in miglia, risulta leggermente inferiore a $2\pi + 1/n$ (con $n = 1, 2, 3, \ldots$).

2. Consideriamo la Terra perfettamente sferica, come nella risoluzione dell'esercizio precedente. Il terreno che Roberto vuole acquistare è limitato da due archi di meridiano e da due archi di parallelo. Si pensi a due meridiani fissi e ad un parallelo che si sposti, invece, verso i Poli *a partire* dall'Equatore; i due meridiani fissi intercettano sul parallelo mobile un arco che risulta tanto piú corto quanto piú ci si allontana dall'Equatore. Quindi il centro della porzione di terreno che Roberto vorrebbe comperare dovrebbe appartenere alla linea dell'Equatore: egli pertanto *non* può sperare di trovare una simile zona negli Stati Uniti.

3. Il minimo numero di monete che può essere posto in un fazzoletto è ovviamente 0. Il numero immediatamente superiore a questo non può essere inferiore ad 1, quello ancora immediatamente superiore non può essere inferiore a 2... ed il numero di monete da deporre nell'ultimo (decimo) fazzoletto non può essere inferiore a 9. Quindi il minimo numero di dollari richiesto per una distribuzione del tipo di quella descritta nell'enunciato di questo problema è:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45.$$

Dunque Roberto non può, disponendo solo di 44 pezzi, eseguire una simile distribuzione.

4. Per numerare 999 pagine di un volume sono necessarie

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$$

cifre. Se il volume fosse di x pagine, si dovrebbe risolvere l'equazione:

$$2889 + 4\,(x - 999) = 2989.$$

Segue $x = 1924$. Tale risoluzione mette in risalto una notevole circostanza: in certi casi può rivelarsi utile e, come qui, persino necessario, considerare inizialmente un valore approssimato dell'incognita.

5. Per risultare divisibile per 72, il numero —679— deve essere divisibile tanto per 8 che per 9. Affinché esso sia divisibile per 8, deve essere tale anche il numero 79— (poiché 1000 è divisibile per 8) e quindi 79— deve essere 792; cioè, l'ultima cifra cancellata dal tempo è 2. Affinché — 6792 sia divisibile per 9, deve risultare tale la somma delle cifre (è il criterio di divisibilità

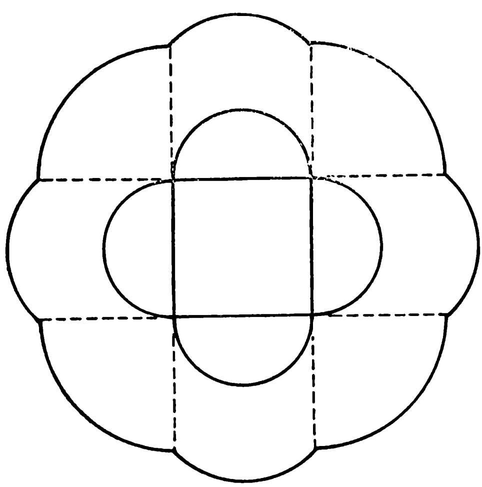


Fig. 31.

per 9) e quindi la prima cifra cancellata dal tempo è 3. Ogni tacchino, ai tempi del nonno, costava 5,11 dollari (essendo 367,92/72 = 5,11).

6. "Sopra un piano sono dati in posizione *un punto ed una figura dotata di centro di simmetria.* Determinare una retta pas-

sante per quel punto e tale che le due parti in cui essa divide la suddetta figura ammettano eguale area." Ovviamente la retta richiesta deve passare anche per il centro di simmetria (v. *Paradosso dell'inventore*).

7. I due lati dell'angolo devono comunque passare ciascuno per un vertice del quadrato. Fin tanto che essi contengono ciascuno un vertice di una medesima coppia, il vertice dell'angolo descrive lo stesso arco di circonferenza (in virtú del teorema menzionato nel suggerimento). Quindi ogni luogo richiesto è costituito da vari archi di circonferenza che sono quattro semicirconferenze nel caso a) e otto quarti di circonferenze nel caso b), come è illustrato nella figura 31.

8. Ogni asse interseca la superficie del cubo in qualche punto che può essere un vertice del solido, oppure stare sopra uno spigolo o all'interno di una faccia di questo. Se un asse passa per un punto di uno spigolo (che però non sia un vertice), questo punto deve essere il punto medio di tale segmento, altrimenti il medesimo spigolo non potrebbe sovrapporsi a se stesso in virtú di una rotazione del tipo indicato. Analogamente, un asse che intersechi una faccia del cubo in un punto interno ad essa deve intersecarla nel centro. Naturalmente tutti gli assi passano per il centro del cubo. Pertanto si determinano i seguenti tre tipi di assi:

1) 4 assi, congiungenti ciascuno due vertici opposti del cubo; angoli di rotazione corrispondenti: 120°, 240°;
2) 6 assi, congiungenti ciascuno i punti medi di due spigoli opposti; angolo di rotazione corrispondente: 180°;
3) 3 assi, congiungenti ciascuno i centri di due facce opposte; angoli di rotazione corrispondenti: 90°, 180°, 270°.

Per la determinazione delle lunghezze dei segmenti interni al solido di assi del primo tipo, v. paragrafo 12; per quella degli analoghi segmenti relativi agli assi delle altre due specie i calcoli sono molto piú semplici. La media aritmetica richiesta risulta:

$$\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+3}{13}=1{,}416.$$

(Questo problema è indicato come esercizio preliminare allo studio della cristallografia. Un lettore sufficientemente esperto di calcolo integrale può osservare che il risultato ottenuto è una buona approssimazione della "altezza media" del cubo, che infatti è eguale a $3/2 = 1{,}5$.)

9. Il piano passante per uno spigolo di lunghezza a e perpendicolare al segmento di lunghezza b divide il tetraedro assegnato in due tetraedri congruenti, *piú semplici da considerare*, ciascuno dei quali ha base di area $ab/2$ ed altezza di lunghezza $a/2$. Quindi il volume richiesto è dato dalla seguente espressione:

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6} \, .$$

10. La base della piramide è un poligono di n lati. In corrispondenza dei casi a) e b), la piramide ammette eguali fra loro rispettivamente gli n spigoli laterali e le n altezze (uscenti dall'apice) delle sue facce laterali. Si tracci l'altezza della piramide e se ne congiunga il piede con ciascuno degli n vertici della base nel caso a) e con ciascuno degli n piedi delle altezze delle facce laterali nel caso b); si perviene in entrambe le ipotesi ad *n triangoli rettangoli aventi come cateto comune l'altezza della piramide*: questi n triangoli rettangoli sono congruenti fra loro. Infatti essi hanno ipotenuse che, essendo gli spigoli laterali della piramide nel caso a) e le altezze delle facce del medesimo solido nel caso b), risultano tutte eguali in virtú delle definizioni avanzate nell'enunciato del problema; inoltre, come abbiamo detto poco fa, i suddetti triangoli ammettono come cateto comune l'altezza della piramide e ciò basta, trattandosi di triangoli rettangoli, per concludere che essi sono tutti congruenti fra loro. Segue che questi n triangoli devono avere eguale anche l'altro cateto; tutti questi terzi lati escono da uno stesso punto, il piede dell'altezza, e giacciono su un medesimo piano, quello della base della piramide; quindi essi risultano proprio, rispettivamente nel caso a) e nel caso b), raggi della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta alla base della piramide considerata. Si rileva che, nell'ipotesi b), resta da dimostrare, però, che gli n raggi suddetti sono perpendicolari ai lati del poligono di base; ciò risulta da un noto teorema di geometria dello spazio.

È veramente notevole la circostanza che una figura piana, il triangolo isoscele, ammetta *due figure spaziali analoghe distinte.*

11. Si nota che la prima equazione è connessa alla quarta dalla medesima relazione che lega la seconda alla terza: i coefficienti che figurano nei termini che stanno a primo membro sono gli

stessi ma procedono secondo un ordine opposto in ciascuna equazione rispetto all'altra ed i secondi membri differiscono solo per il segno. Si sommino membro a membro la prima e la quarta equazione, la seconda e la terza. Si ottiene:

$$6(x+u)+10(y+v)=0$$
$$10(x+u)+10(y+v)=0.$$

Questo risultato può essere interpretato come un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite $(x+u)$ ed $(y+v)$, per le quali si deduce facilmente:

$$x+u=0, \qquad y+v=0.$$

Sostituendo nelle prime due equazioni del sistema assegnato $-x$ e $-y$ al posto rispettivamente di u e v, si trova:

$$-4x+4y=\ \ 16$$
$$6x-2y=-16.$$

Questo sistema semplicissimo conduce alla soluzione:

$$x=-2, \qquad y=2, \qquad u=2, \qquad v=-2.$$

12. Nell'intervallo di tempo che intercede fra l'istante di partenza e quello in cui i tre amici si ritrovano riuniti, ciascuno di questi ha percorso la stessa distanza. (Si ricordi che lo spazio percorso si ottiene moltiplicando la velocità per il tempo impiegato.) Nella condizione distinguiamo due parti:

Roberto e Paolo hanno percorso la stessa distanza,
Paolo e Pietro hanno percorso la stessa distanza;

le medesime parti possono essere scritte, in virtú delle notazioni introdotte nel suggerimento e dei dati, nella forma:

$$vt_1-vt_2+vt_3=vt_1+pt_2+pt_3,$$
$$vt_1+pt_2+pt_3=pt_1+pt_2+vt_3.$$

Dalla seconda equazione si ricava:

$$(v-p)t_1=(v-p)t_3.$$

Naturalmente è lecito supporre che la velocità media dell'automobile sia maggiore di quella dei podisti, ossia $v>p$. Segue allora:

$$t_1=t_3;$$

questa conclusione ci permette di asserire che Pietro e Paolo camminano per intervalli di tempo eguali. D'altra parte, la prima equazione può essere scritta nella forma:

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{v+p}{v-p} \; ;$$

essendo, per quanto è stato dedotto poco fa, $t_3/t_2 = t_1/t_2$, si perviene alle risposte:

$$\text{a)} \quad \frac{v(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{v(v+3p)}{3v+p}$$

$$\text{b)} \quad \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{v-p}{3v+p}$$

c) In realtà, $0 < p < v$. Ci sono due casi limite:

Se $p = 0$, a) $v/3$ e b) $1/3$;
se $p = v$, a) v e b) 0.

Questi ultimi risultati sono evidenti e non richiedono alcun calcolo.

13. La condizione può essere facilmente separata in quattro parti traducibili nelle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a - d + bg^{-1} = 85 \\ a + b = 76 \\ a + d + bg = 84 \\ 3a = 126. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ricava $a = 42$ e pertanto dalla prima segue $b = 34$. Sommando membro a membro le altre due (allo scopo di eliminare d), si ottiene

$$2a + b\,(g^{-1} + g) = 169.$$

Ormai a e b sono noti, quindi l'equazione ottenuta è reciproca di secondo grado in g. Segue allora la possibilità delle due alternative:

$$g = 2,\ d = -26 \qquad \text{oppure} \qquad g = 1/2,\ d = 25.$$

Le terne di elementi richieste risultano dunque:

68, 42, 16 oppure 17, 42, 67
17, 34, 68 oppure 68, 34, 17.

14. Se a e $-a$ sono due radici aventi eguale valore assoluto, esse devono essere termini consecutivi della progressione cui appartengono, che pertanto sarà della forma:

$$-3a, \ -a, \ a, \ 3a.$$

Quindi il primo membro dell'equazione assegnata deve potersi scrivere:

$$(x^2-a^2)\ (x^2-9a^2).$$

Sviluppando questo prodotto indicato ed eguagliando i coefficienti dei termini dello sviluppo cosí ottenuto a quelli dei termini dell'equazione data, si perviene al seguente sistema:

$$\begin{aligned} 10a^2 &= 3m+2 \\ 9a^4 &= m^2 \end{aligned}$$

L'eliminazione di a conduce all'equazione di secondo grado in m:

$$19m^2-108m-36=0;$$

quindi la soluzione richiesta è: $m=6$, oppure $m=-6/19$.

15. Siano a, b, c, ordinatamente la misura, in pollici, dei cateti e dell'ipotenusa del nostro triangolo rettangolo. Le tre parti della condizione possono allora esprimersi nella seguente forma:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 60 \\ a^2+b^2 &= c^2 \\ ab &= 12c. \end{aligned}$$

Essendo, come è ben noto,

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab,$$

possiamo scrivere:

$$(60-c)^2 = c^2+24c.$$

Di qui segue che $c=25$ e quindi $a=15$ e $b=20$, oppure, $a=20$ e $b=15$ (ovviamente si tratta sempre dello stesso triangolo).

16. Le tre parti della condizione possono essere scritte nella forma:

$$\sin\alpha = \frac{x}{a},$$

$$\sin\beta = \frac{x}{b},$$

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

L'eliminazione di a e di b conduce all'espressione richiesta:

$$x^2 = \frac{c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}.$$

17. Si può presumere che sia:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ricordando le considerazioni esposte in *Induzione e induzione matematica*, ci si chiede: L'eguaglianza che supponiamo valida resta tale quando si passi dal numero n al numero $n + 1$? In virtú della precedente espressione, in caso di risposta affermativa dovrebbe essere:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Per verificare tale identità, sottraiamo membro a membro da essa la precedente; allora si ottiene:

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!},$$

che può essere scritta nella forma:

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Quest'ultima eguaglianza è manifestamente vera per $n = 1, 2, 3 \ldots$; quindi la validità della nostra congettura è dimostrata attraverso il procedimento ora riferito.

18. Sembra che a secondo membro dell'n-esima eguaglianza debba comparire n^3, mentre a primo membro figurare la somma di n addendi. L'ultimo addendo di tale somma dovrebbe essere l'm-esimo numero dispari, che può essere scritto nella forma $2m - 1$ essendo:

$$m = 1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(v. *Induzione e induzione matematica*, 4). Quindi l'ultimo addendo della somma indicata a primo membro dell'n-esima eguaglianza dovrebbe essere.

$$2m - 1 = n^2 + n - 1.$$

Pertanto si può risalire all'addendo iniziale della stessa somma in *due* modi: diminuendo sempre di due unità, e per $n-1$ volte, l'ultimo addendo della somma indicata, oppure aumentando di due unità l'ultimo addendo della somma indicata nell'eguaglianza scritta nella riga immediatamente superiore. Questi due procedimenti forniscono ordinatamente le seguenti espressioni per il primo addendo ora considerato:

$$(n^2 + n - 1) - 2(n-1) = n^2 - n + 1,$$
$$[(n-1)^2 + (n-1) - 1] + 2.$$

È facile verificare, eseguendo le operazioni indicate e riducendo i termini simili, che i due risultati coincidono. Benissimo! Allora possiamo affermare che

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \dots + (n^2 + n - 1) = n^3.$$

Questa è dunque la traduzione simbolica della legge generale secondo cui è stata compilata la tabella fornita dall'enunciato del problema. Per dimostrarne la validità, si comincia ad osservare che a primo membro dell'espressione ottenuta è indicata la somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica di ragione 2. Seguendo la formula che esprime il totale di una somma siffatta (che è eguale alla media aritmetica del primo ed ultimo termine moltiplicata per il numero degli addendi), è immediato verificare che è proprio

$$\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2}\, n = n^3.$$

Cosí la validità della nostra soluzione è dimostrata.

(La formula dianzi menzionata può essere ricavata in base ad un'illustrazione non troppo diversa da quella della figura 18.)

19. La misura del perimetro dell'esagono regolare assegnato è $6n$, quindi tale perimetro può essere considerato costituito da $6n$ segmenti di frontiera unitari e contiene $6n$ vertici di frontiera. Allora, nel passaggio da $n-1$ ad n, V aumenta di un'unità e risulta

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 3n^2 + 3n + 1;$$

(v. *Induzione e induzione matematica*). L'esagono è diviso in 6 grandi triangoli equilateri dalle 3 diagonali passanti per il suo centro; si può allora facilmente riconoscere che

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = 6n^2$$

(si applica qui la stessa formula che esprime la somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica richiamata nella risoluzione del problema 18). I T triangoli hanno in totale $3T$ lati, ma, nel computo che conduce a questo numero complessivo $3T$, ogni lato della suddetta suddivisione interno all'esagono e di lunghezza unitaria è stato contato due volte, mentre ogni lato che giace sul contorno dell'esagono è stato contato una volta sola. Dunque si ha:

$$2L = 3T + 6n, \qquad\qquad L = 9n^2 + 3n.$$

(Per un lettore che possieda una buona cultura matematica: dal teorema di Eulero relativo ai poliedri segue che $T + V = L + 1$. Si verifichi l'esattezza di quest'altra relazione.)

20. Ecco una successione di problemi analoghi ordinati per difficoltà crescente: Si calcolino A_n, B_n, C_n, D_n ed E_n. Ciascuno di tali simboli denota il numero dei modi in cui può essere pagata la somma di n cents; la differenza consiste nelle monete di cui si dispone:

A_n solo cents;
B_n solo cents e nickels;
C_n cents, nickels e dimes;
D_n cents, nickels, dimes e quarters;
E_n cents, nickels, dimes, quarters e mezzi dollari.

I simboli E_n (di cui ora è chiara l'origine) ed A_n sono già stati usati nel suggerimento.

Il numero di tutti i possibili modi in cui si può pagare la somma di n cents è espresso da E_n; tuttavia si possono distinguere due eventualità:

Prima ipotesi. Non si usa alcun mezzo dollaro. Il numero di pagamenti siffatti è allora, per definizione, D_n.

Seconda ipotesi. Si usa una o piú monete da mezzo dollaro. Quando sia stata versata una moneta da mezzo dollaro, rimane da pagare la somma di $(n - 50)$ cents e ciò può essere compiuto esattamente in E_{n-50} modi distinti.

Si ricava allora che

$$E_n = D_n + E_{n-50};$$

e analogamente:

$$D_n = C_n + D_{n-25}$$
$$C_n = B_n + C_{n-10}$$
$$B_n = A_n + B_{n-5}.$$

Con un briciolo di attenzione, si riconosce che le formule ora scritte restano valide quando si ponga

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

(ciò che evidentemente ha senso) e si convenga di considerare eguale a zero una delle suddette quantità numeriche se il suo indice assume valori negativi. (Per esempio, come è facile riconoscere, $E_{25} = D_{25}$; questo è in pieno accordo con la formula ottenuta, perché $E_{25-50} = E_{-25}$ e, per convenzione, $E_{-25} = 0$.)

Dalle relazioni cui siamo pervenuti, si possono calcolare i numeri incogniti per ricorrenza, ossia a partire dai piú piccoli valori di n e dalle prime lettere dell'alfabeto. Cosí si può calcolare, mediante una semplice addizione, C_{30} quando siano noti B_{30} e C_{20}. La tabella che segue è stata compilata con questo metodo. Si nota che nella prima riga di tale tabella, ossia nella riga corrispondente ad A_n, e nella sua prima colonna, corrispondente ad $n = 0$, tutti gli elementi sono eguali ad 1. (Perché?) Da questi numeri, per ricorrenza, e per addizioni successive, si calcolano gli altri; infatti ogni altro elemento della tabella è eguale o all'elemento della stessa colonna e della riga precedente cui esso appartiene o alla somma di due numeri: precisamente la somma dell'elemento della stessa colonna e della riga precedente con un altro elemento ben determinato situato alla sinistra del precedente. Per esempio,

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16.$$

I calcoli sono stati eseguiti fino ad E_{50}; si è cosí scoperto che 50 *cents possono essere pagati esattamente in* 50 *modi diversi.* Ampliando la stessa tabella, il lettore può convincersi che $E_{100} = 292$: un dollaro può essere cambiato esattamente in 292 modi distinti.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50

Indice

Stampato dalla
Tipolito Milano-Roma
Via Pomezia 12 - Milano

Collana di aggiornamento e didassi 11

La "Collana di aggiornamento e didassi" si propone di raccogliere i corsi di aggiornamento organizzati dalle maggiori istituzioni culturali italiane e straniere per consentire a tutti gli insegnanti di materie scientifiche delle scuole primarie e secondarie le informazioni sugli sviluppi piú recenti della ricerca scientifica indispensabili per un insegnamento moderno. In tale modo, i problemi sorti durante lo svolgimento dei corsi e dei dibattiti che seguono — ai quali possono assistere solamente i pochi insegnanti invitati — non restano chiusi nell'ambito ristretto dei partecipanti, ma raggiungono tutti i docenti, di ogni ordine di scuola.
A queste pubblicazioni di aggiornamento culturale si accompagnano nella collana le opere piú valide di autori italiani e stranieri sugli attuali orientamenti didattico-pedagogici dell'insegnamento scientifico, intesi in senso moderno.

George Polya
Come risolvere i problemi di matematica
Logica ed euristica nel metodo matematico

Il volumetto del Polya, matematico tra i piú noti del mondo contemporaneo, è un saggio ormai classico di metodologia euristica matematica e di indagine su alcuni processi tipici del pensiero.
L'acutezza dell'analisi e la tipicità delle situazioni matematiche e psicologiche studiate ne fanno un'opera di grande valore formativo. Essa ha avuto una vasta influenza, non soltanto in campo matematico, ma ancor più in quello della psicologia dell'intelligenza fino ad anticipare o a confermare alcune conquiste recenti in questo campo.
Nella collana di aggiornamento e didassi l'opera è stata messa a disposizione del lettore, prima ancora di altri saggi di psicologia o di didattica, proprio per il suo carattere anticipatore e propedeutico rispetta alcuni importanti indirizzi di ricerca in questo campo.
Tutti gli studenti che hanno scelto la laurea didattica in matematica e tutti i professori di tale materia che desiderano riflettere su questioni di metodo non disgiunte dagli aspetti psicopedagogici dovrebbero conoscere questo volume che è stato un autentico best-seller dell'editoria mondiale.

George Polya, professore emerito di matematiche, ha insegnato dal 1942 alla Stanford University. Laureatosi a Budapest, dal 1914 al 1940 ha lavorato presso l'Istituto Federale Svizzero di Tecnologia di Zurigo. In questa stessa Collana ha pubblicato l'opera in due volumi: **La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi.**

L. 4.800
(4.526)