

RICORDA:

Equazione canonica di una ellisse col centro nell'origine degli assi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con

a = lunghezza semiasse orizzontale e b = lunghezza semiasse verticale

L'ellisse assegnata è $(h-2)x^2 + y^2 = h-1$

Il termine noto dell'equazione canonica è 1. Nell'ellisse assegnata non è 1. Devo dividere ambo i membri per $h-1$, ma lo posso fare solo se impongo che sia $h-1 \neq 0 \rightarrow h \neq 1$. Da ora in avanti sarà $h \neq 1$.

Divido: $\frac{(h-2)x^2}{h-1} + \frac{y^2}{h-1} = 1$. Individuo a e b .

È immediato che $b^2 = h-1$.

Devo "capovolgere" la frazione $\frac{h-2}{h-1}$. Posso farlo solo se $h-2 \neq 0 \rightarrow h \neq 2$.

Da ora in avanti sarà $h \neq 1, h \neq 2$.

Scrivo: $\frac{(h-2)x^2}{h-1} + \frac{y^2}{h-1} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{h-1}{h-2}} + \frac{y^2}{h-1} = 1 \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{h-1}{h-2} \\ b^2 = h-1 \end{cases}$, con $h \neq 1, h \neq 2$.

Trattandosi di due quadrati non nulli, deve essere:

$$\begin{cases} h \neq 1, h \neq 2 \\ \frac{h-1}{h-2} > 0 \\ h-1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h \neq 1, h \neq 2 \\ h < 1 \text{ e } h > 2 \\ h > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h \neq 1, h \neq 2 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow h > 2 \text{ (risposta a.)}$$

(Prova tu a verificare che se $h = 2$ l'equazione rappresenta le rette $y = \pm 1$, se $h < 2$ rappresenta un'iperbole, cioè se $h \leq 2$ l'equazione non rappresenta un'ellisse.)

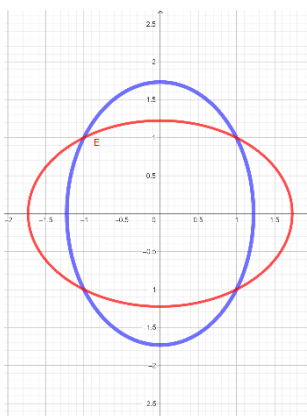
I fuochi stanno sull'asse x se a è il semiasse maggiore, altrimenti stanno sull'asse y.

Pongo:

$$\begin{cases} a > b \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 > b^2 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{h-1}{h-2} > h-1 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h < 3 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow 2 < h < 3 \text{ (risposta b.)}$$

La risposta c. è il contrario di b., sempre che sia $h > 2$. Quindi:

$$\begin{cases} \frac{h-1}{h-2} < h-1 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h > 3 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow h > 3 \text{ (risposta c.)}$$



Esempi:

In figura due ellissi:

risposta b.: $h = 2,5$ ellisse rossa con i fuochi sull'asse x

risposta c.: $h = 4$ ellisse azzurra con i fuochi sull'asse y

Ellisse: $\frac{x^2}{\frac{h-1}{h-2}} + \frac{y^2}{h-1} = 1$. Coordinate dei fuochi sull'asse y: $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$.

I fuochi hanno coordinate $(0, \pm 2)$ se $\begin{cases} \sqrt{b^2 - a^2} = 2 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 4 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} h - 1 - \frac{h-1}{h-2} = 4 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h^2 - 8h + 11 = 0 \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = 4 \pm \sqrt{5} \\ h > 2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{h = 4 + \sqrt{5}} \quad (\text{risposta d.})$$

L'ellisse che verifica la condizione d. ha equazione $\frac{x^2}{-1+\sqrt{5}} + \frac{y^2}{3+\sqrt{5}} = 1$

