ES 451

$y = e^{\frac{x+k}{x}}$

a) Dal grafico si vede che $f(1)=1 \Rightarrow$

$e^{1+k} = 1 \Rightarrow \boxed{k=-1}$

quindi $y = e^{\frac{x-1}{x}}$

b) Dominio:

unica condizione: $\boxed{x \neq 0}$ (in quanto al denominatore di una frazione)

Immagine

$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$

$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{\frac{-1}{0^-}} = e^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{1^-} = e^-$

$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{1^+} = e^+$

Inoltre $e^{\frac{x-1}{x}} > 0 \quad \forall x \in$ Dominio

Quindi: $\boxed{\text{Immagine: } y > 0 \cap y \neq e}$

Intervalli crescenza:

$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}} = e^{1-\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = e^{1-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} e^{1-\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Quindi la funzione risulta crescente
da $-\infty$ a 0 e
da 0 a $+\infty$

c) è invertibile dopo aver fatto un restringimento del Codominio dal momento che non è suriettiva. Mentre non abbiamo problemi con l'iniettività.

Per calcolare l'inversa:

$y = e^{\frac{x-1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right) \Rightarrow \ln y = \frac{x-1}{x} \Rightarrow$

$x \ln y = x - 1 \Rightarrow 1 = x - x\ln y \Rightarrow 1 = x(1-\ln y) \Rightarrow$

$x = \frac{1}{1-\ln y}$

Dato che solitamente usiamo x come variabile indipendente:

$$\boxed{y = \frac{1}{1-\ln x}}$$