$$y = \operatorname{arctg} x + a x^2$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + 2ax$$

$$y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + 2a$$

La funzione <u>non</u> ammette flessi per quei valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali y'' non si annulla.

Studio la funzione

$$f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2a,$$

simmetrica rispetto al punto $(0; 2a)$. La studio in $[0, +\infty)$.

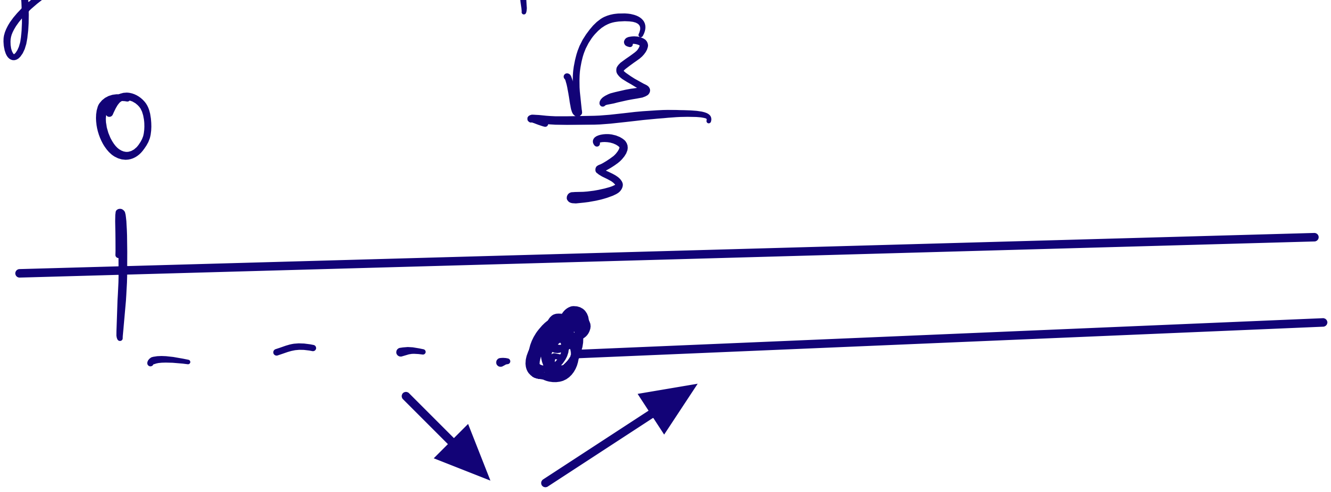
$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2a$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^- + 2a = (2a)^-$$

$\Rightarrow y = 2a$ e' asintoto oriz.

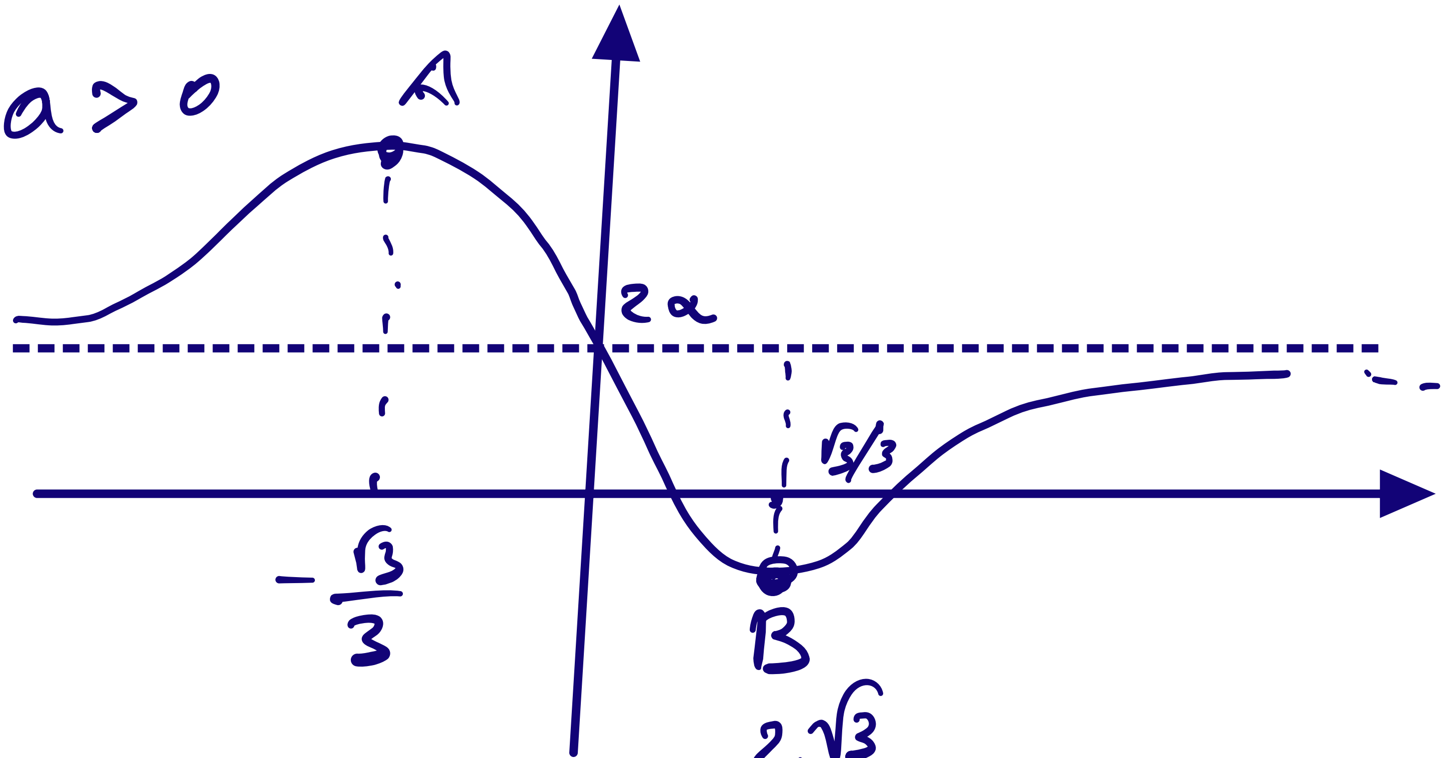
$$f'(x) = 2\,\frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3}$$

Segno di $f'(x)$



In $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $f(x)$ ha un minimo relativo.

Grafico probabile:



$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + 2a =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{8} + 2a$$

Quindi il punto di minimo relativo è $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} + 2a\right)$.

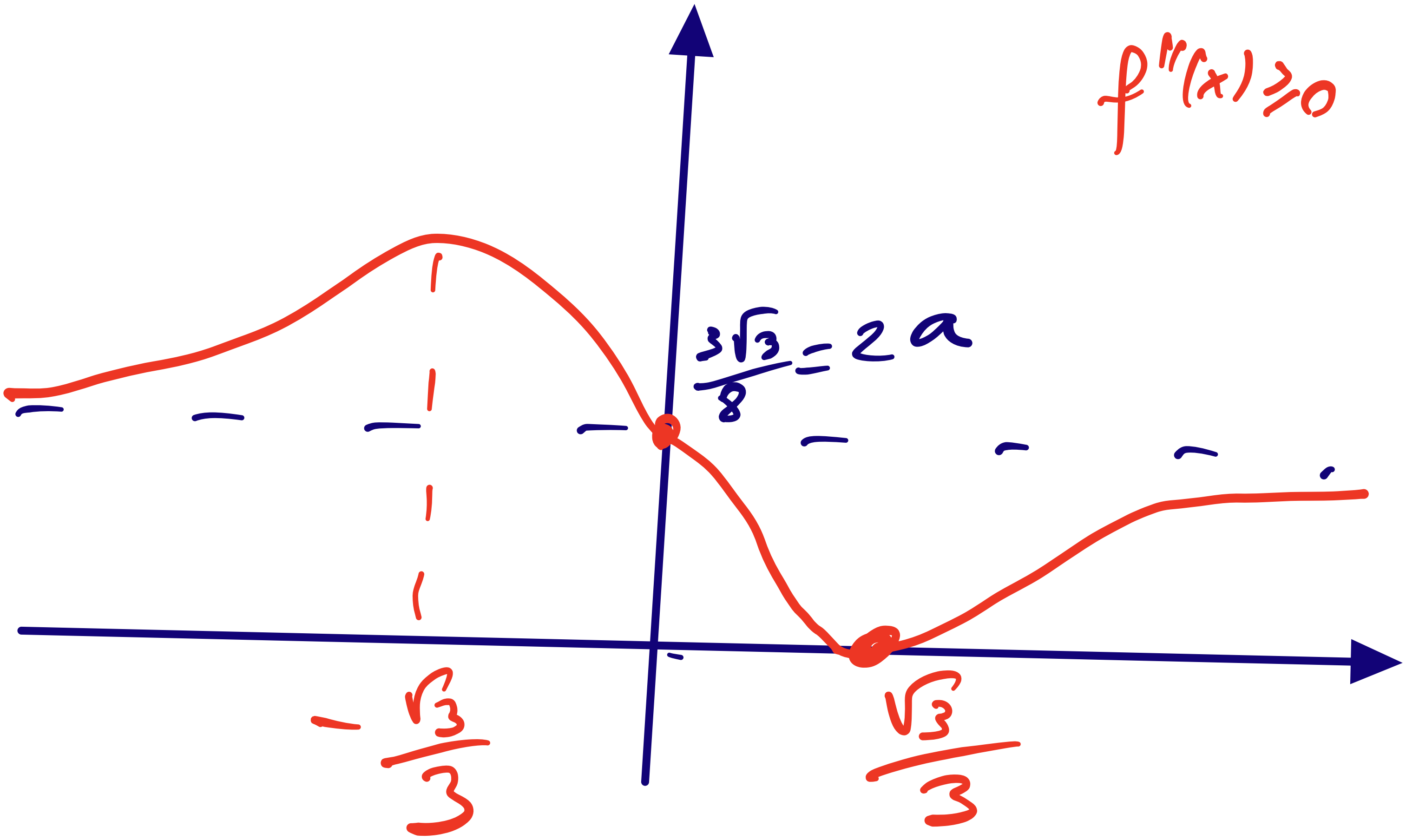
Cerco i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la $f(x)$ non cambia segno.

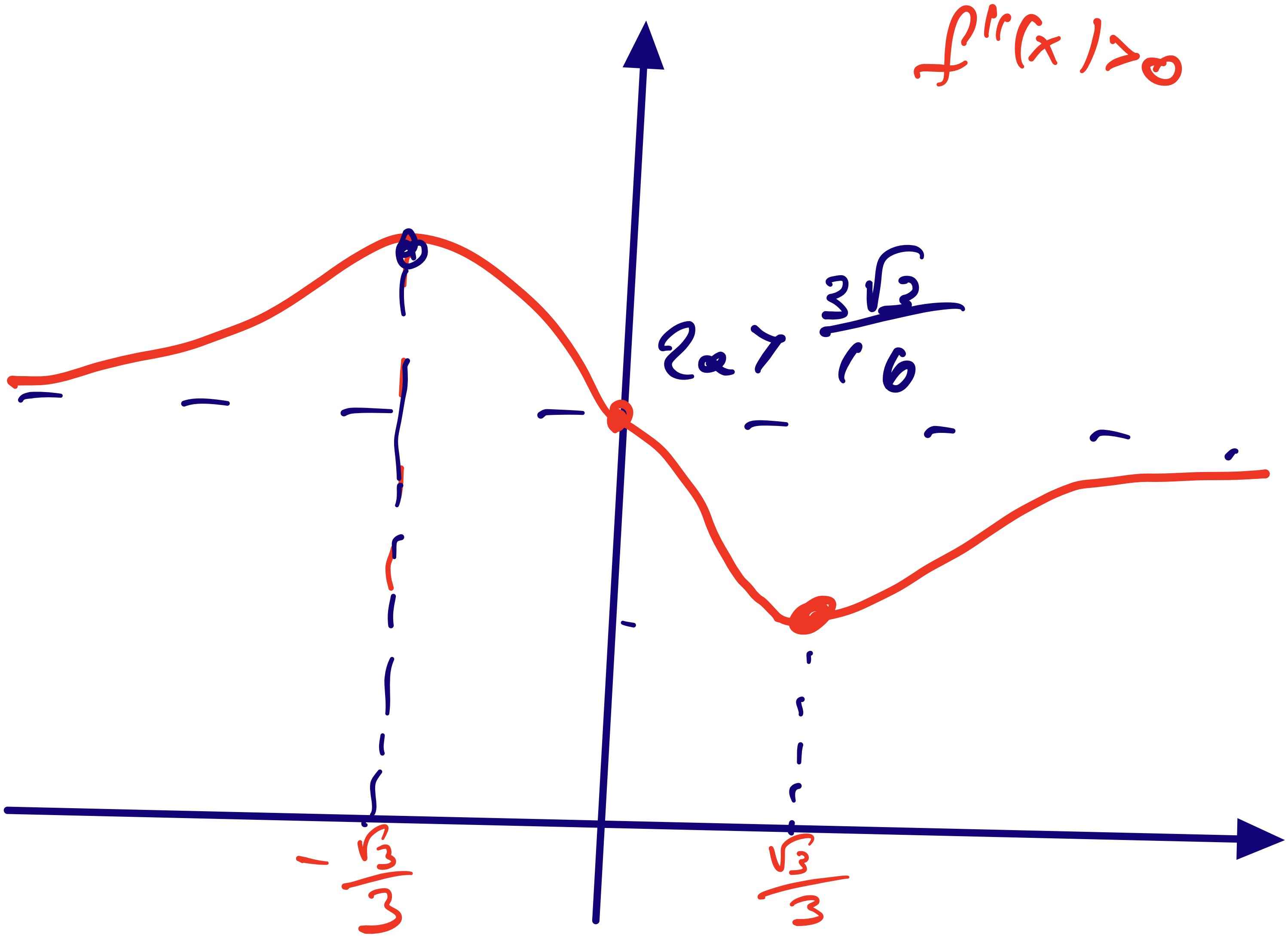
Sono quelli per i quali, se è $a \geq 0$, l'ordinata di B è non negativa, ossia

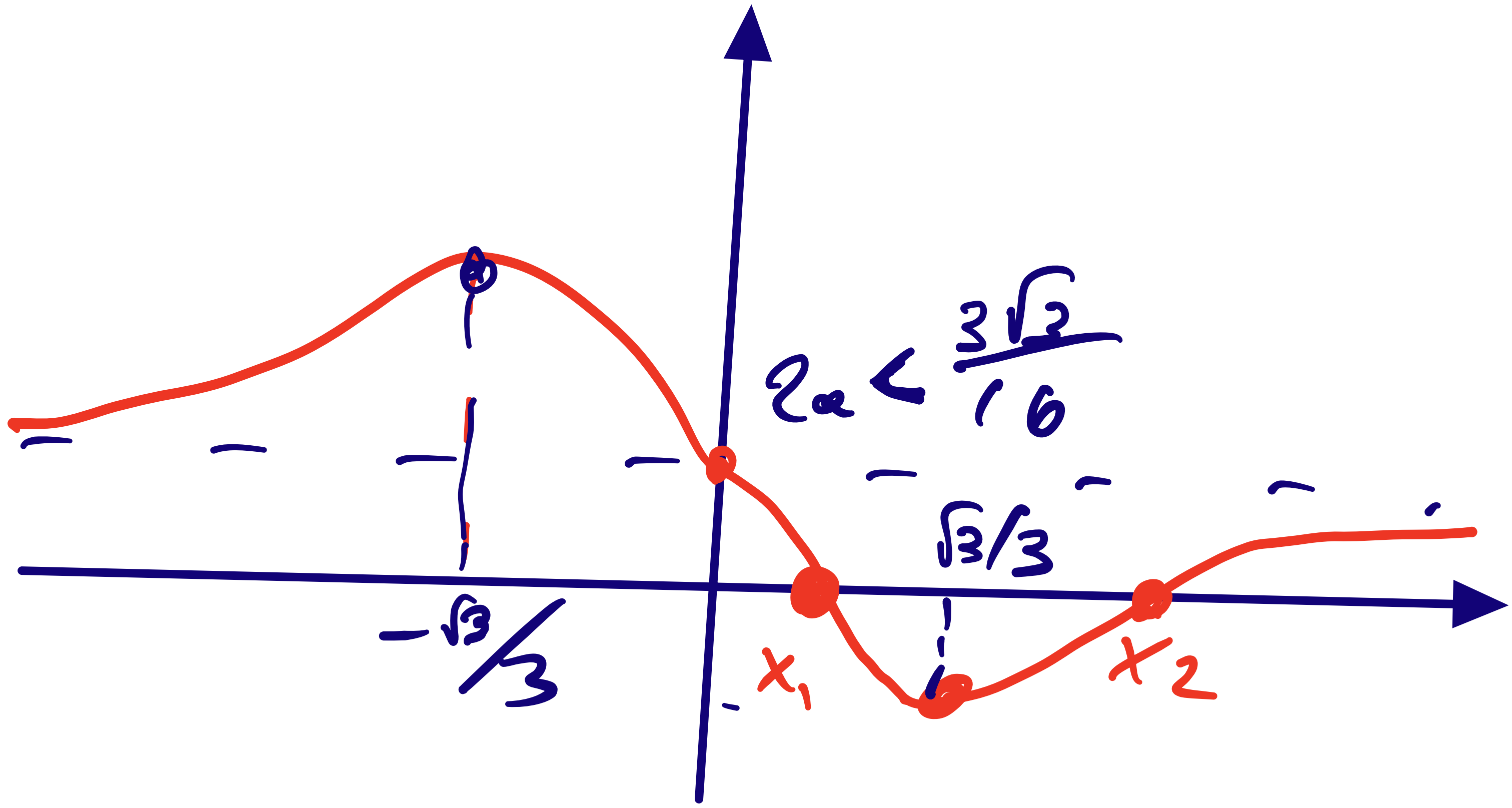
$y_B \geq 0 \Rightarrow$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{8} + 2a \geq 0 \Rightarrow$$

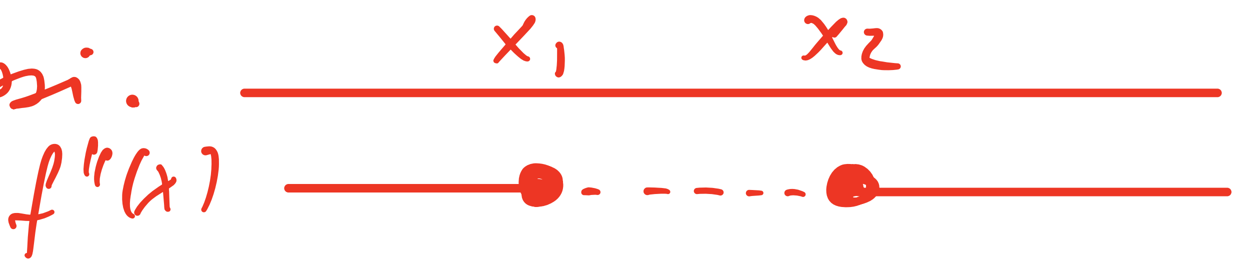
$$a \geq \frac{3\sqrt{3}}{16}$$


f''(x) ≥ 0
3√3/8 = 2a
−√3/3
√3/3


f''(x) > 0
2a > 3√3/16
−√3/3
√3/3



x_1 e x_2 sono le ascisse dei flessi.



Analogamente, si ottiene che se $a < 0$ la curva non interseca l'asse x se è $a \leq -\frac{3\sqrt{3}}{16}$

In definitiva:

se $a \leq -\frac{3\sqrt{3}}{16} \vee a \geq \frac{3\sqrt{3}}{16}$

la curva di equazione

$$y = \operatorname{arctg} x + a x^2$$

<u>non</u> ammette flessi.