$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 4|x| + 4}{x^2}}$$

Sai che

(1) $|x| = \begin{cases} x\,, & se\ x \geq 0 \\ -x\,, & se\ x < 0 \end{cases}$

(2) $\sqrt{x^2} = |x|.$

Per la (1) è:

$$y = \sqrt{\frac{x^2+4|x|+4}{x^2}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2-4x+4}{x^2}}, & se\ x < 0 \\ \sqrt{\frac{x^2+4x+4}{x^2}}, & se\ x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 4|x| + 4}{x^2}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(x-2)^2}{x^2}}, & se\ x < 0 \\ \sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2}}, & se\ x > 0 \end{cases}$$

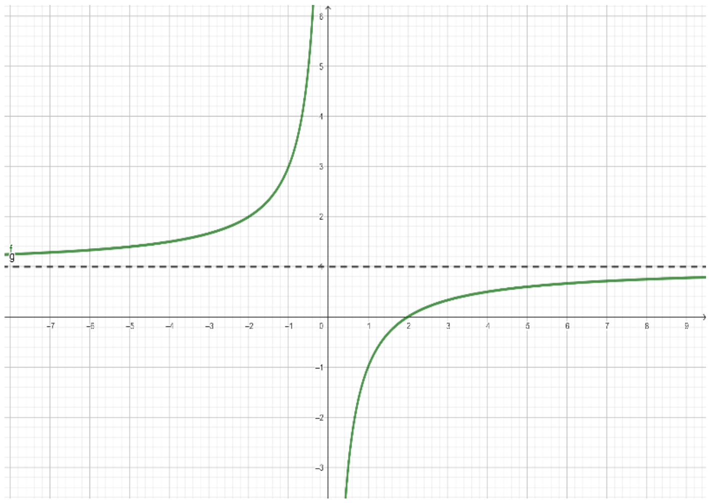
Le espressioni $\frac{(x-2)^2}{x^2}$ e $\frac{(x+2)^2}{x^2}$ sono non negative per ogni valore non nullo di x, quindi il dominio della funzione è $\boldsymbol{R} - \{0\}$**.**

Per la (2) è:

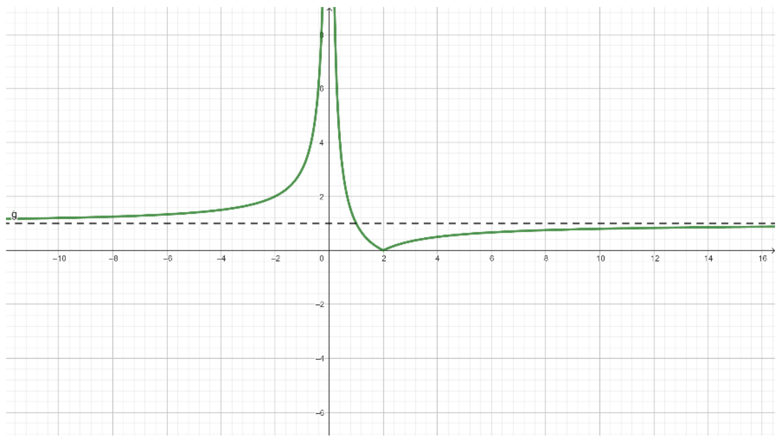
$$y = \begin{cases} \sqrt{\frac{(x-2)^2}{x^2}} = \left|\frac{x-2}{x}\right|, & se\ x < 0 \\ \sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2}} = \left|\frac{x+2}{x}\right|, & se\ x > 0 \end{cases}$$

Sono due funzioni omografiche. Traccio le due funzioni, poi i loro valori assoluti, poi limito la prima ai valori negativi di x, la seconda ai valori positivi:

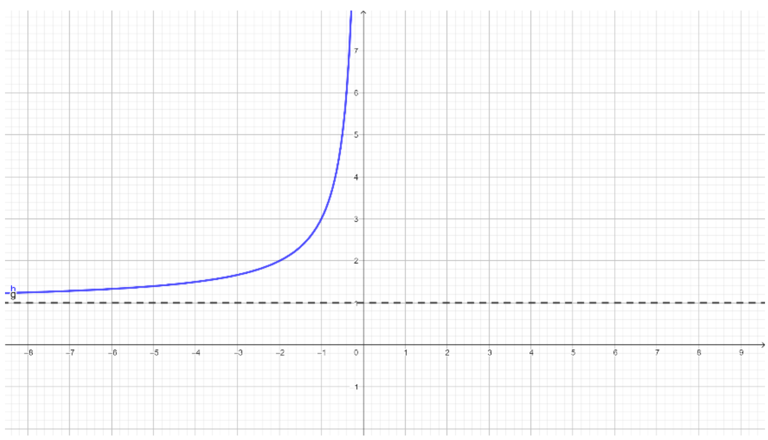
$$y = \frac{x-2}{x}$$



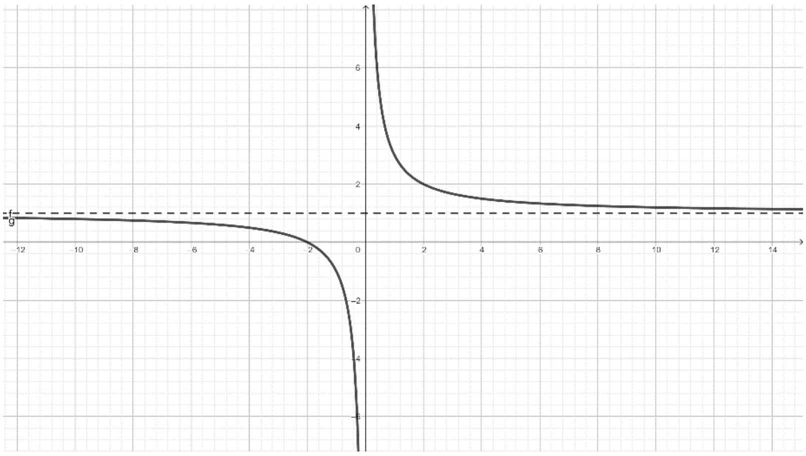
$$y = \left|\frac{x-2}{x}\right|$$



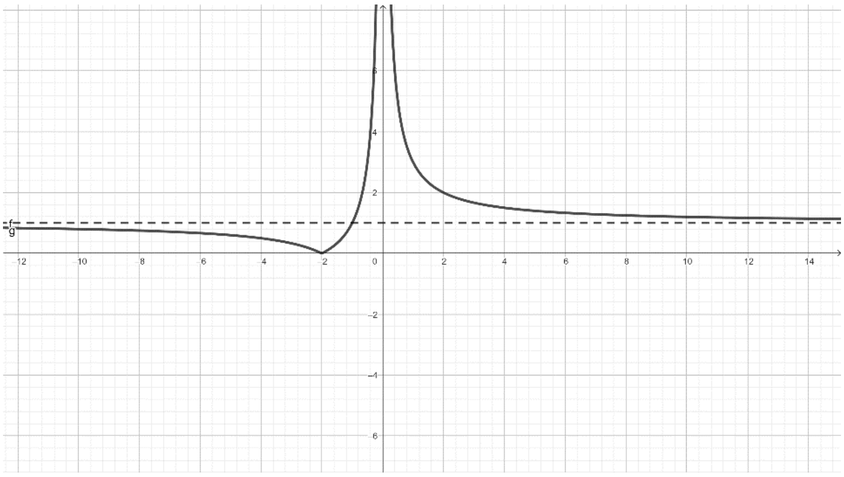
$$(*)\ y = \left|\frac{x-2}{x}\right| \text{, per x} < 0$$



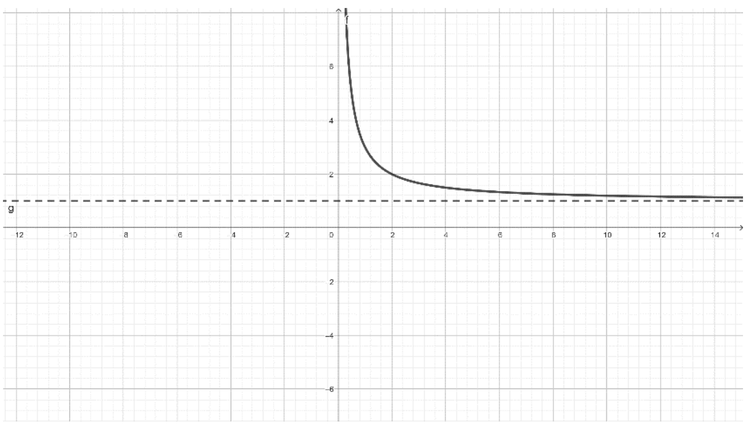
$$y = \frac{x+2}{x}$$



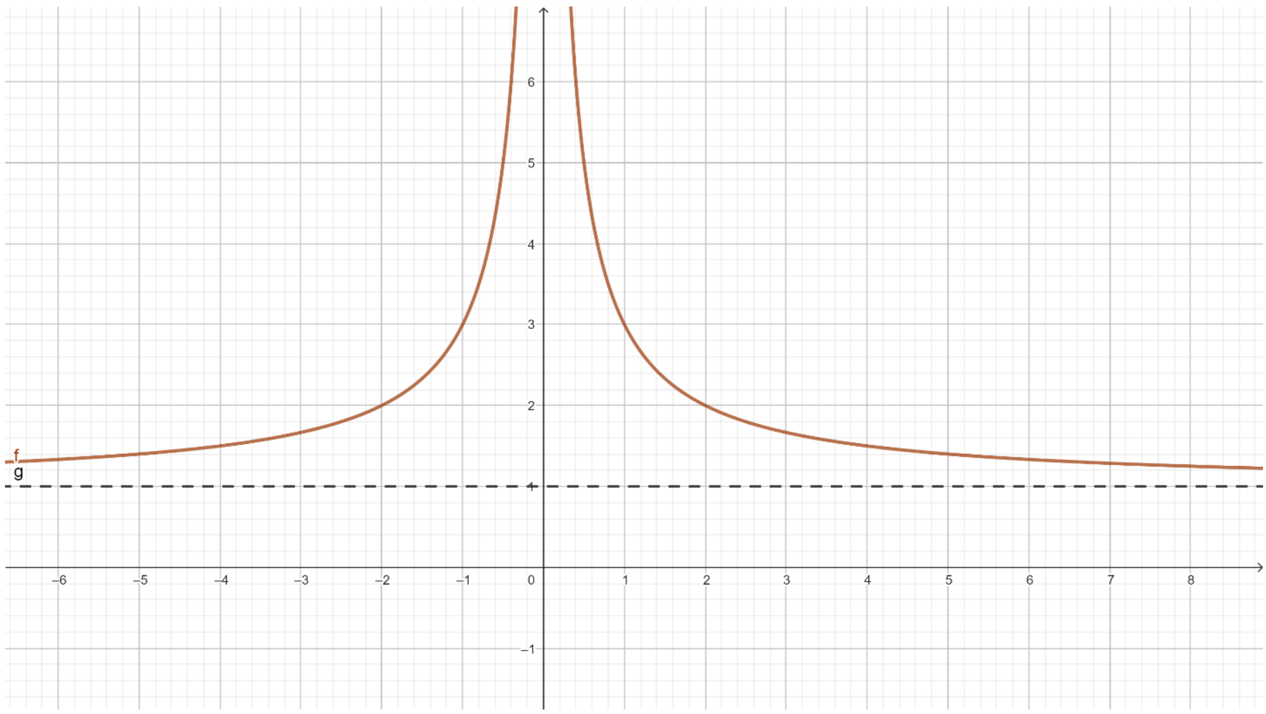
$$y = \left|\frac{x+2}{x}\right|$$



$$(**)\ y = \left|\frac{x+2}{x}\right|,\ per\ x > 0$$



Il grafico della funzione assegnata $y = \sqrt{\frac{x^2+4|x|+4}{x^2}}$ è l'unione dei grafici (*) e (**):



Se conosci le proprietà di simmetria, ti accorgi che

$$y(x) = \sqrt{\frac{x^2+4|x|+4}{x^2}} \qquad \text{e} \qquad y(-x) = \sqrt{\frac{(-x)^2+4|-x|+4}{(-x)^2}} = y(x)$$

quindi la funzione è **pari**.

Traccia il ramo corrispondente a x>0, poi traccia il suo simmetrico rispetto all’asse y.